

#### §4. Предварительные замечания по квантовой гипотезе Планка (или истории гениальных догадок и «добросовестных» заблуждений)

*«In scientia naturali principia observatioibus confirmāri debent».*<sup>1</sup> К. Линней.

*«Меньшинство может быть правым. Большинство всегда ошибается».* Г.Ибсен.

Макс Карл Эрнст Людвиг Планк; точная дата рождения – 24 апреля 1858 г.; место рождения – портовый город Киль, столица земли Гольштейн. В сентябре 1874 г. Макс Планк зачислен студентом Мюнхенского университета; 28 июня 1879 г. М. Планк держал докторский экзамен, получив высшую оценку. В Берлине на заседании Немецкого физического общества 14 декабря 1900 г. М. Планк выступил с докладом, изложив свою «предварительную рабочую гипотезу». Доклад назывался «К теории распределения энергии излучения нормального спектра». Последняя дата официально считается теперь точной датой рождения квантовой теории. Восемнадцатью годами позже «предварительная рабочая гипотеза» была отмечена Нобелевской премией; в нобелевской же речи «Возникновение и постепенное развитие теории квантов», произнесенной 2 июля 1920 г. в Стокгольме М. Планк честно указывает на неизбежные трудности, которые сопутствуют попыткам внедрения кванта действия в классические теории: «С течением времени они [трудности] скорее увеличились, чем уменьшились, и если за этот промежуток бурно несущееся вперед исследование на время перешло от них к текущим вопросам, то добросовестного систематика эти зияющие пустоты удручают еще мучительнее. То, что является в теории Бора основным предположением при установлении законов действия, складывается из известных гипотез, которые, без сомнения, каждым физиком прошлого поколения были бы совершенно отвергнуты. Можно еще считать приемлемым то, что известные, отмеченные совершенно определенными квантовыми условиями пути играют особенную роль; менее легко принять, что электроны,двигающиеся по этим путям с ускорением, не излучают совершенно никакой энергии. Но теоретику, воспитаннику классической школы, должно показаться чудовищным и почти неприемлемым требованием для способности воображения, что вполне четко определенная частота испускаемого светового кванта должна быть иной, чем частота излучающего электрона.

Но дело решают цифры, и вследствие этого теперь роли постепенно изменились по сравнению с прошлым. Вначале речь шла о том, каким образом с большими или меньшими усилиями втиснуть новый чуждый элемент в рамки общепринятых теорий; теперь, завоевав надежное место, он,

---

<sup>1</sup> В естественной науке принципы должны подтверждаться наблюдениями (лат.).

со своей стороны, перешел в нападение, и сейчас уже ясно, что эти старые рамки каким-нибудь образом будут им сломаны. Неясно еще только, где и в какой степени ему удастся сделать это. Если позволительно уже сейчас высказать мнение об ожидаемом исходе этой горячей битвы, то, кажется, все говорит за то, что из классических теорий великие принципы термодинамики и в теории квантов не только сохранят в неприкосновенности свое центральное положение, но даже соответствующим образом расширят свои владения...

Проблема кванта действия не перестанет побуждать и оплодотворять мысль исследователей, и чем большие трудности представляются в ее решении, тем важнее она окажется для расширения и углубления всего нашего физического знания» [1].

Действительно, в мировом научном сообществе чаще всего именно дату 14 декабря 1900 г. принято считать «днем рождения квантовой физики», а иногда и «днем рождения новейшей физики», приурочивая к ней соответствующие юбилеи. Возможно, начало было положено в мае 1926 г. ленинградским химиком М.А. Блохом, опубликовавшим в журнале «Природа» статью, посвященную 25-летию гипотезы квантов, где, в частности, приводятся слова, якобы принадлежащие М. Планку в прямой речи: «Важнейшей целью, девизом всей моей естественнонаучной работы являлось для меня всегда стремление к возможному упрощению и единству физического мировоззрения; важнейшее же средство к достижению этого – примирение противоположного взаимным оплодотворением. Когда два воззрения или две теории оспаривают друг друга, то обыкновенно в каждой из них содержится здоровое, непреходящее ядро.<sup>2</sup> Вся задача заключается лишь в том, чтобы его изолировать и отделить от ненужных примесей, часто выступающих далеко на первый план и стремящихся казаться необходимыми» [2].

В 1977 г. истории зарождения и формирования квантовых концепций посвящен был юбилейный<sup>3</sup> выпуск журнала «Успехи физических наук» [3]: «День 14 декабря 1900 г., когда Планк доложил свои новые и особенно важные результаты на заседании Немецкого физического общества, обычно и считают днем рождения квантовых представлений. Появился *квант энергии* как дискретная порция энергии (отметим, что сам Планк пользовался

---

<sup>2</sup> Спорный посыл. Например, во время дискуссии, которая состоялась после официальных докладов на I Сольвеевском конгрессе, Анри Пуанкаре как раз больше всего поразило то, «что одна и та же теория опирается то на принципы старой механики, то на новые гипотезы, являющиеся отрицанием этой механики; нельзя забывать, что нет положения, которое нельзя было бы легко доказать, если ввести в доказательство две противоречивые посылки».

<sup>3</sup> В 1977 г. отмечался 50-летний юбилей зарождения квантовой механики как нового раздела естествознания; отсчет предлагалось вести от 1927 г., поскольку основные концепции квантовой теории разрабатывались в течение 1925 – 28 г. г. В частности, этому событию в свое время был посвящен специальный сборник статей под ред. Л.С. Полака «50 лет квантовой механики» [4], однако соответствующие почести и дань уважения в адрес М. Планка были представлены в должной мере.

термином «элемент энергии», и лишь позже стали говорить о «квантах энергии») [универсальную постоянную  $h$  Планк значительно позже, лишь в 1906 г., назовет *квантом действия*]. Характерным для подхода Планка являлось то, что дискретность энергии он относил к свойствам *вещества*, в его теории квантовалась энергия резонаторов, а излучение рассматривалось как непрерывное, как электромагнитные волны. Притом Планк еще не ставил конкретно вопрос об элементарных актах испускания и поглощения отдельных порций электромагнитной энергии  $h\nu$ , его интересовало в первую очередь решение задачи о спектральном распределении энергии равновесного излучения».<sup>4</sup>

Декабрьский номер журнала «Успехи физических наук», но уже за 2000 г. [5]: «Столетие открытия постоянной Планка  $h \equiv 2\pi\hbar$  естественно усиливает интерес к ретроспективному анализу этого Первого Шага квантовой теории. В своем признании величия этого (единственного фактически состоявшегося) шага все историки физики, разумеется, едины. Однако как только анализ выходит на широкое поле «*виртуальной истории*», переходя к взаимному сопоставлению целого ряда «виртуальных» Первых Шагов по их эвристичности в плане достижения главных целей квантовой теории, - суждения этих историков нередко оказываются скептическими. Так, видный историк науки М. Джеммер считает само осуществленное Планком квантование энергии радиационного осциллятора (ниже КЭРО) «концептуально чересчур сложным» и на этом основании отказывает этому Первому Шагу в «эвристической оптимальности», притом в сильных выражениях типа «вызывает сожаление», «не может быть никаких сомнений», «потребовалось бы гораздо меньше интеллектуальных усилий» и т. п. А уже упомянутый Ф. Хунд, основываясь на значительной временной дистанции между открытием  $\hbar$  (1900 г.) и, несомненно, ключевым шагом в «главном течении» квантовой теории – боровской теорией атома (1913 г.), идет еще дальше: «Открытие кванта действия  $\hbar$  явилось, можно сказать, преждевременными родами».

Однако все, о чем говорилось выше, дает пока лишь представление о частных гранях (пусть и незаурядной) творческой личности исследователя. Важно точно знать на каком общенаучном фоне выстраивалась размеренная научная жизнь профессора теоретической физики (а с 1894 г. действительного члена Прусской академии наук) М. Планка. Отметим в этой связи вкратце те вехи научной эволюции, которые в той или иной степени близки очерченной здесь теме.

В 1842 г. немецкий корабельный врач (!) Юлиус Роберт Майер открывает закон сохранения энергии и определяет механический эквивалент теплоты

---

<sup>4</sup> Идею дискретности самого электромагнитного излучения – гипотезу *квантов света* – выдвинул впервые все-таки А. Эйнштейн в своей мартовской статье за 1905 год в работе «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света». Но это как бы уже иная история – следующий качественный шаг.

(Дж. Джоуль пришел к этому же в 1843 г., а Г. Гельмгольц и Г. Грин – в 1847 г.).

В 1849 – 50 г. г. Уильям Джон Макуори Ранкин и Рудольф Юлиус Эмануэль Клаузиус (независимо и одновременно!) устанавливают общие соотношения между теплотой и механической работой (*первое начало термодинамики*):  $\delta Q = dU + \sum A_i da_i$ . У. Ранкин к тому же еще предложил так называемую вихревую модель атома (значительно позже, в 1871 г., первую электронную модель атома с планетарной структурой предложит В.Э. Вебер, тот самый, кто в 1848 г. выдвинул идею сверхлегкой частицы – электрона).

В 1850 г. Р. Клаузиус сформулировал *второе начало термодинамики* (У. Томсон свою формулировку предложил в 1851 г.).<sup>5</sup>

В 1859 г. Густав Роберт Кирхгоф устанавливает закон, согласно которому отношение испускательной и поглотительной способностей не зависит от природы тела, оно является для всех тел одной и той же (универсальной) функцией частоты (длины волны) и температуры:

$$\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} = f(\omega, T). \quad (4.1)$$

Для абсолютно черного тела по определению  $a_{\omega T} \equiv 1$ , следовательно, для такого тела  $r_{\omega T} = f(\omega, T)$ . Тремя годами позже Г. Кирхгоф предлагает концепцию абсолютно черного тела и его модель.

Годы создания макроскопической электродинамики Джеймсом Клерком Максвеллом охватывают период с 1860 г. по 1865 г. К слову стоит упомянуть, что статистическую природу второго начала термодинамики показал впервые именно Дж. Максвелл в 1867 г. («демоны Максвелла»). Однако лишь в 1872 г. 28-летний Людвиг Эдуард Больцман, используя понятия энтропии физической системы и вероятности ее состояния, строго доказал статистический характер второго начала термодинамики. Таким образом, «туман» над энтропией постепенно рассеивается во времена, когда М. Планк как раз вступает в студенческую пору жизни.

Как известно, Йозеф Стефан в 1879 г., исследуя экспериментальные данные, пришел к выводу, что энергетическая светимость  $R$  любого тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. Однако уже в

---

<sup>5</sup> Формулировка Р. Клаузиуса: *невозможен процесс, при котором теплота переходила бы самопроизвольно от холодных тел к телам нагретым.*

Формулировка У. Томсона: *невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого тела определенного количества тепла и превращение этого тепла полностью в работу.*

В качестве современной формулировки можно довольствоваться следующей: *энтропия изолированной системы при любом реальном процессе либо возрастает, либо остается неизменной.*

Но дело даже не в этом. Если обратить внимание на хронологию, то складывается впечатление, что имеет место «спринтерская» гонка, когда «мгновения» отделяют друг от друга участников гонки.

1884 г. Л. Больцман, исходя из термодинамических соображений, предлагает для энергетической светимости абсолютно черного тела следующее значение:

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (4.2)$$

где  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$  (постоянная Стефана – Больцмана). Примечательно, что Й. Стефан в своих обобщениях опирался на весьма скудные и... ошибочные (!) данные экспериментов Джона Тиндаля, согласно которым полное испускание нагретой платиновой проволоки при  $1200^\circ\text{C}$  (1473 К) было в 11,7 раза больше, чем при  $525^\circ\text{C}$  (798 К), что приводит к результату  $\left(\frac{1473}{798}\right)^4 \approx 11,7$ .<sup>6</sup>

Итальянский физик А. Бартоли в 1884 г. описывал мысленный эксперимент, где указал «циклический процесс, при котором с помощью движущихся зеркал теплота могла бы быть передана от холодного тела к горячему; поскольку согласно второму началу термодинамики в формулировке Клаузиуса для подобной передачи теплоты требуется затратить работу, Бартоли заключил, что тепловое излучение оказывает давление... Вскоре после этого Больцман показал, что в соответствии с теорией Максвелла<sup>7</sup> и методом статистического усреднения Крёнига это давление равно одной трети плотности энергии. Связав с излучением, рассматриваемым как некий «газ», две термодинамические переменные – температуру  $T$  и давление  $p$ , – Больцман из термодинамических соображений показал, что  $u = aT^4$  и, значит,  $E = \sigma T^4$ » [6]. Здесь  $u$  – полная плотность энергии в полости, а  $E$  – то же самое, что и  $R^*$  (обозначения, принятые в монографии М. Джеммера).

Однако вывод Больцмана никак не затрагивал описание спектрального распределения излучения, хотя возникла новая идея в мысленном эксперименте Больцмана – это перераспределение энергии излучения по частоте в соответствии с эффектом Доплера, возникающим в результате отражения излучения от движущегося поршня.

В 1893 г. Вильгельм Вин исследовал адиабатическое сжатие идеально отражающей сферы и вывел зависимость, согласно которой функция спектрального распределения должна иметь вид:

<sup>6</sup> Современное повторение эксперимента Д. Тиндаля привело бы к значению 18,6, а не 11,7, т. к. Тиндаль измерял излучение далекое от излучения абсолютно черного тела. Двойная ошибка (или четное число ошибок), оказывается, может привести к правильному результату.

<sup>7</sup> Больцман ссылается на пункт 792 книги Максвелла «Трактат об электричестве и магнетизме» (1873), где указывается, что «в среде, в которой распространяются волны, существует давление, направленное перпендикулярно волнам и численно равное энергии в единице объема» [7]. Первое экспериментальное доказательство существования светового давления было получено в 1899 г. П.Н. Лебедевым.

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (4.3)$$

где  $F$  – некоторая функция отношения частоты к температуре. При теоретических исследованиях обычно для характеристики спектрального состава равновесного теплового излучения используют функцию частоты  $f(\omega, T)$ , в экспериментальных же работах удобнее пользоваться функцией длины волны:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 \cdot F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T), \quad (4.4)$$

где  $\psi$  – функция исключительно аргумента  $\lambda T$ . Это и есть *теорема Вина*. Отсюда, в частности, следует, что если за  $\lambda_m$  обозначить длину волны, соответствующую максимальному значению ординаты графика (абсциссой которого является излучаемая энергия), то мы должны получить  $\lambda_m T = b = const$ , где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ , что известно как *закон смещения Вина*. Впрочем, более детальный вывод удобнее привести в параграфах 45 – 47, посвященных теории излучения. Здесь же для дальнейшего анализа проблемы целесообразно позаимствовать данные, приводимые Э. Уиттекером [8]: «Три года спустя Вин исследовал вид функции  $\psi(\lambda T)$ . Он заметил, что закон, согласно которому в разреженном сосуде излучение аналогично излучению абсолютно черного тела, при условии равенства температуры тела и стенок сосуда, справедлив и для случая, когда излучающим веществом является газ, отделенный от вакуума прозрачным окошком, а от окружающей среды – зеркальными стенками. При этом газ обладает конечной поглощающей способностью излучения всех длин волн и испускает лучи при чисто температурной активизации. Предположим, что закон распределения скоростей Максвелла верен, тогда количество молекул, скорость которых находится в диапазоне от  $v$  до  $v + dv$ , пропорционально

$$v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv, \quad (4.5)$$

где  $\alpha$  – постоянная, связанная со средней квадратичной скоростью выражением

$$\overline{v^2} = \frac{3}{2} \alpha^2. \quad (4.6)$$

Следовательно, абсолютная температура пропорциональна  $\alpha^2$ . Мы принимаем, что каждая молекула посылает колебания, длина волны и интенсивность которых зависят только от скорости молекулы.

Поскольку длина волны  $\lambda$  излучения, испущенного любой молекулой, является функцией  $v$ , то, следовательно,  $v$  является функцией  $\lambda$ . Значит,

интенсивность  $F(\lambda, T)$  излучения, длина волны которого находится между  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ , пропорциональна количеству молекул, испускающих излучение этого периода, а также функции скорости  $v$  (т. е. функции  $\lambda$ ). Поэтому

$$F(\lambda, T) = g(\lambda) e^{-\frac{f(\lambda)}{T}}, \quad (4.8)$$

где  $g$  и  $f$  обозначают неизвестные функции. Однако из предыдущей работы Вина нам известно, что

$$F(\lambda, T) = \lambda^{-5} \varphi(\lambda T). \quad (4.9)$$

Объединяя эти результаты, мы имеем

$$F(\lambda, T) = C \lambda^{-5} e^{-\frac{b}{\lambda T}}, \quad (4.10)$$

что представляет собой *закон излучения Вина*.

Как раз именно к этому периоду, к 1896 г., историки науки относят начальные шаги, выполненные М. Планком на пути решения проблемы излучения абсолютно черного тела, проблемы, ставшей главным делом жизни ученого, проблемы, сумевшей предопределить облик физики на ближайшее столетие. М. Планк приступил к решению задачи с полной самоотдачей, на какую только был способен; причем мотивы какой-то неслыханной приверженности на протяжении многих лет данной задаче сам же М. Планк в дальнейшем неоднократно формулировал: «Внешний мир представляет собой нечто не зависимое от нас, абсолютное, чему противопоставим мы, а поиски законов, относящихся к этому абсолютному, представляется мне самой прекрасной задачей в жизни ученого» [9]. Или в другом месте [10]: «... я с рвением принялся за работу. В качестве прямого пути решения проблемы предлагалось использовать максвелловские уравнения электромагнитной теории света».

Воспоминания М. Борна удачно дополняют характеристику М. Планка как ученого [11]: «Планк обратил внимание на теоретические исследования Кирхгофом свойств «черного тела», т. е. излучения в полости с идеально отражающими стенками, которая заполнена произвольно излучающими и поглощающими телами. Он показал, что равновесие устанавливается в течение времени, за которое все тела приобретут одну и ту же температуру, и излучение по своим свойствам, включая спектральное распределение (энергия на единицу длины волны), не зависит от тела, а только от температуры. Этот так называемый нормальный спектр является, следовательно, чем-то «абсолютным» и потому чрезвычайно привлекательным для Планка, философский склад ума которого всегда стремился исследовать «абсолютное». С этого времени объяснение закона стало его целью, которой он начиная с 1896 г. с поразительным упорством,

всегда в контакте с параллельными экспериментальными исследованиями, проводившимися в институте, старался достичь».

В своих устремлениях решить задачу спектрального состава излучения абсолютно черного тела М. Планк был весьма далек от одиночества. И если не армия, то, по крайней мере, внушительная когорта физиков, как теоретиков, так и экспериментаторов, штурмовали эту, казалось, неразрешимую проблему. Помимо упоминавшихся выше, это были Д.У. Рэлей, Д.Х. Джинс, О.Р. Люммер, П. Принсгейм, Г. Рубенс, Ф. Курлбаум и многие другие. При этом следует считать совершенно благоприятной ситуацией, что последние четверо работали, что называется, бок о бок с Планком в Берлине, что позволяло Планку буквально «по ходу дела» модернизировать свои теории, а это в конечном итоге и привело его к «счастливого отгаданной интерполяционной формуле».

Как теперь уже точно установлено [12], «вероятнее всего, Планк открыл свой закон рано вечером в воскресенье 7 октября [1900 г.]. В тот день семейство Планков навестили Рубенс с женой. Рубенс рассказал Планку, что по его данным величина  $\rho(\nu, T)$ <sup>8</sup> пропорциональна  $T$  при малых  $\nu$ . Не успели гости уйти, как Планк сел за работу и сразу понял, что нужно изменить в законе [излучения] Вина, описываемом уравнением<sup>9</sup>:

$$\rho = \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta \nu}{T}}, \quad (4.11)$$

чтобы он соответствовал результату Рубенса. В тот же вечер он отправил Рубенсу открытку с полученной им формулой, а 19 октября в ходе дискуссии после представления работы Курлбаумом он предложил ее публично.<sup>10</sup> В обозначениях, введенных Планком через два месяца, его формула имеет вид:

<sup>8</sup>  $\rho(\nu, T)$  – спектральная плотность, т. е. плотность энергии в единице объема при частоте  $\nu$ . Это та же самая совершенно функция спектрального распределения  $f(\omega, T)$ , которая фигурирует в теореме Вина, если выполнена замена угловой частоты  $\omega$  (она же круговая частота, она же циклическая частота – уж кто как предпочитает) на частоту  $\nu$  в соответствии с  $\omega = 2\pi\nu$ .

<sup>9</sup> Это та же формула Вина (4.10), однако вместо длины волны  $\lambda$  в ее записи используется частота  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , тогда  $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu$ . То же самое, но уже для циклической частоты

$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega$ , т. к.  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ . Отсюда следует, что уравнения (4.10) и (4.11)

идентичны, хотя и представлены разными переменными. Откуда проистекает такое «разночтение» в обозначениях отчасти пояснено в комментарии к формуле (4.4), выражающей суть теоремы Вина.

<sup>10</sup> Собственно говоря, здесь Абрахам Пайс полагается на те сведения, которые он почерпнул из некролога Генриху Рубенсу, написанного Герхардом Гетнером в 1922 г. Трактовка самого Макса Планка несколько иная.



$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (4.12)$$

Уравнение содержит в себе закон излучения Вина 1896 г. (формула 4.10):

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (4.13)$$

при  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ ... Даже если бы Планк ничего больше не сделал в физике после 19 октября, он все равно вошел бы в историю как автор закона излучения. Величие Планка состоит в том, что он пошел дальше. Он хотел дать толкование уравнения (4.12) и в результате стал основателем квантовой теории».

Далее, там же у А. Пайса, как впрочем и у всех других без исключения историков физики, находим констатацию непреложного факта наличия трех этапов работы М. Планка – электромагнитного этапа, термодинамического этапа, статистического этапа.

**1. Электромагнитный этап.** М. Планк начал с простейшего предположения: излучатели в полости – это линейные гармонические осцилляторы, каждый со своей фиксированной частотой  $\nu$ . Теория дипольного излучения разрабатывалась Г. Герцем еще в 1889 г., а согласно Г.Р. Кирхгофу распределение равновесного излучения не зависит от природы стенок полости. Тем не менее, сразу возникает вопрос – а не слишком ли это упрощенная модель, даже для своего времени? Можно ли было представить вещество (физическую материю стенок), состоящим не из гипотетических осцилляторов, а из атомов? Как реально осуществляется миграция энергии в стенках полости, если осцилляторы (они же резонаторы) «настроены» исключительно на свою собственную частоту излучения (тот же закон смещения Вина), если нагрев осуществляется узкой спектральной линией (например, лазером) или вообще безызлучательно (например, механический удар или радиоактивность)? Известно, что в то время М. Планк принимал атомистическую теорию Л. Больцмана далеко не безоговорочно, что, в принципе, служило источником недружелюбной взаимной раздражительности. Впоследствии М. Планк вспоминал [13]: «Я сам мог играть лишь роль секунданта Больцмана [в полемике с Оствальдом], причем моих услуг он, конечно, совершенно не ценил и даже не считал желательными, так как очень хорошо знал, что моя точка зрения существенно отличается от его точки зрения. Особенно неприятно ему было то, что к *атомистической теории*, которая составляла основу всей его исследовательской работы, я относился не только равнодушно, но даже несколько отрицательно».

Вопросы, которые возникают при рассмотрении исключительно резонаторов-осцилляторов не такие уж наивные и беспомощные, как это может показаться на первый взгляд. По крайней мере, во времена, когда создавалась теория излучения, само излучение тепловых лучей хотя и стали рассматривать как электромагнитный процесс, однако, как правило, предполагали существование неких элементарных осцилляторов, находящихся во взаимодействии с электронами, атомами, молекулами излучающих тел. И если осциллятором у Вина является совокупность несвязанных молекул, заключенных в замкнутую оболочку, стенки которой зеркальны, то, что имеется в виду у Планка, – вопрос открытый. Все-таки трудно избавиться от ощущения, что Планком была использована несколько упрощенная модель, когда пустое пространство заполнялось абстрактными линейными осцилляторами, которые, в свою очередь, сравнивались с акустическими резонаторами, камертонами или колебательными контурами со слабым затуханием и различными собственными частотами. Предполагалось лишь, что каким-то образом за счет обмена лучистой энергией между осцилляторами в этом пустом пространстве и должно бы установиться стационарное излучение, соответствующее закону Кирхгофа. Но, как уже указывалось выше, резонатор (в классическом представлении этого объекта) реагирует только на те лучи (волны), которые сам же и испускает. М. Планк это понимал прекрасно и отмечал как слабое место избранной модели: «Осциллятор реагирует лишь на такое излучение, которое он сам испускает, и не проявляет ни в малейшей мере чувствительности к соседним областям спектра». Когда исследователь изучает, например, спектральные серии Бальмера, Пашена, Брэкета и прочие на водороде или любуется знаменитым желтым дублетом натрия (линии  $\lambda=5690 \text{ \AA}$  и  $\lambda=5696 \text{ \AA}$ , соответствующие переходу электрона из состояния  $3p$  в состояние  $3s$ ), то первое, что, возможно, ему приходит на ум в данном случае, – это, очевидно, модель резонатора. Линейчатые спектры, высокая добротность. С черным телом как бы все с точностью до «наоборот» – любая линия достаточно быстро «размывается» в сплошной колоколообразный спектр (похожий на максвелловское распределение).<sup>11</sup> Немало усилий приложил Х.А. Лоренц, стремясь найти такой механизм излучения, в основе которого лежала бы созданная им электронная теория.

Е.М. Кляус и У.И. Франкфурт формулируют общую оценку [14]: «Кирхгоф, Больцман и Вин исходили из термодинамических анализов излучения и прибегали лишь к общим выводам электромагнитной теории. Планк в своих исследованиях сочетал термодинамические и электромагнитные аспекты теории излучения, однако у него речь шла не об электронах – реальных носителях определенного заряда, а о резонаторах. Для Лоренца же было существенно включить теорию излучения как составную

---

<sup>11</sup> Что-то не похоже, чтобы стенки полости представляли собой «решето», настроенное на пропускание одних волн и поглощение других, как это можно было бы ожидать, если бы материалом стенок являлись какие-то там гипотетические дискретные резонаторы.

часть в созданную им электронную теорию». Как известно Х. Лоренц эту задачу решить не смог, в чем он в 1908 г. фактически признался в статье «К теории излучения», когда писал: «Долгое время я надеялся, что, соединяя кинетическую теорию даже с обычными представлениями электронной теории, удастся избежать вывода о всеобщности теории Джинса... Теперь мне стало ясно, с какими огромными трудностями мы встречаемся на этом пути; я могу заключить, что вывод законов излучения из электронной теории вряд ли возможен без глубоких изменений ее основ, и я должен рассматривать теорию Планка как единственно возможную. Обмен энергией между эфиром и материей осуществляется резонаторами Планка или подобными частицами, которые по каким-то причинам не подчиняются статистике Гиббса» [15].

По-видимому, М. Планк был убежден, что В. Вин исходил не из тех предпосылок, которые соответствовали бы рассматриваемому феномену. Однако результат Вина был точен (за исключением инфракрасной области). Поэтому Планк быстро сориентировался – в основе своей Вин прав, а основным у Вина было использование распределения Максвелла-Больцмана по скоростям. Рассмотрев уравнение движения линейного осциллятора

$$\ddot{f} + 2\sigma\nu\dot{f} + 4\pi^2\nu^2 f = \frac{3c^3\sigma}{4\pi^2\nu} Z, \quad (4.14)$$

Планк получил один из важнейших результатов в классической физике:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu, T), \quad (4.15)$$

где  $U(\nu, T)$  - средняя (равновесная) энергия осциллятора.<sup>12</sup>

**2. Термодинамический этап.** Достаточно определить  $U(\nu, T)$ , и задача завершена. Если, например, использовать «счастливно отгаданную» формулу (4.12) и последнюю (4.15), то легко находится:

$$U(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (4.16)$$

Далее М. Планк формально определяет термодинамически энтропию  $S$  линейного осциллятора, проинтегрировав уравнение

<sup>12</sup> Подробный вывод либо в трудах М. Планка [16], либо в монографии М. Джеммера [17].

$$dS = \frac{1}{T} dU, \quad (4.17)$$

предварительно представив  $T$  в явном виде как функцию  $U$  при некоторой фиксированной частоте  $\nu$ :

$$S = k \left[ \left( \frac{U}{h\nu} + 1 \right) \ln \left( \frac{U}{h\nu} + 1 \right) - \frac{U}{h\nu} \ln \frac{U}{h\nu} \right]. \quad (4.18)$$

Ясно, что если теперь порядок действий «прокрутить» в обратном порядке, то из последней формулы (4.18) легко получить закон излучения Планка, т. е. ту самую «счастливо отгаданную интерполяционную формулу» (“eine glücklich erratene interpolationsformel”) – (4.12):

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Чтобы обосновать свой выбор, М. Планк остановился на интерполяции

вида<sup>13</sup>:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{a}{U(U+b)} \quad (4.19)$$

<sup>13</sup> В основу своей интерполяции М. Планк положил анализ кривизны  $K$  кривой зависимости энтропии от энергии (кривизна  $K$  в любой точке гладкой кривой определяется как обратная величина радиуса  $R$  окружности, которой можно наиболее точно аппроксимировать кривую в этой точке, т. е.  $K = \frac{1}{R}$ ). Небезынтересно исследование

Дж. Тригга [18]: «Первая работа Планка была опубликована в 1899 г. (когда он еще не был знаком с интерпретацией энтропии как меры “беспорядка”). В ней Планк рассматривал *энтропию отдельного осциллятора* и пытался найти ее связь с энергией осциллятора  $U$ . Он нашел, что основной величиной является кривизна кривой зависимости энтропии от энергии, и, исходя из ошибочного предположения, сделал вывод, что  $K = \frac{const}{U}$ ». И лишь после ознакомления с экспериментальными результатами

Рубенса и Курлбаума «Планк пришел к мысли заменить [это] выражение следующим  $K = \frac{a}{U(U+b)}$ ». Для справки некоторые сведения из матанализа [19]: «Пусть кривая в

плоскости  $Oxy$  является годографом вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ , где  $s$  - длина дуги кривой. Кривизна  $K$  определяется соотношением  $K = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right|$ . Если кривая задана

уравнением в явной форме  $y = f(x)$ , то  $K = \left| y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} \right|$ ».

или, что то же самое:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = a' \ln \frac{U + b}{U}. \quad (4.20)$$

Планк ясно увидел, что в случае малых значений  $U$  выражение для  $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}$  сводится к закону Вина, а, следовательно, к

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{const}{U}. \quad (4.21)$$

В случае же больших значений  $U$  получается согласование с результатами Рубенса-Курлбаума (для инфракрасной части спектра), а также с *законом излучения Рэля-Джинса*<sup>14</sup>:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}, \quad (4.22)$$

для которого

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{const}{U^2}. \quad (4.23)$$

Итак, наступил момент, когда необходимо было переходить от интерполяции (от “угадайки”) к какому-нибудь «утверждению, имеющему реальный физический смысл». Это в конце концов и заставило Планка обратиться к Больцмановской вероятностной концепции энтропии.

До сих пор считалось, что «логика электромагнитного и термодинамического этапов была безупречной, но зато статистический этап выглядел совершенно дико. В 1931 г. Планк вспоминал об этом как об “отчаянном шаге”: «Мне обязательно нужно было получить положительный результат при любых обстоятельствах и любой ценой» [21]. На самом деле «он предпринял не один, а два “шага отчаяния”» [22]. Но об этом чуть позже. Здесь бы хотелось отметить, что “логика” М. Планка легко угадывается – возникает острая необходимость связать энергию с температурой, а это можно осуществить лишь каким-то образом «встроив» температуру  $T$  как

---

<sup>14</sup> М. Планк, скорее всего, ничего и не знал о работе Д.У. Рэля «Замечания о законе полного излучения», которая была опубликована в июне 1900 г., по крайней мере, он на нее нигде не ссылался. Зато впоследствии, благодаря П. Эренфесту, ситуация, описываемая Рэлеем, получила яркое наименование – «*ультрафиолетовая катастрофа*». А, кроме того, затем и Л.Д. Ландау весьма патетически и артистично пытался нагнетать страсти: «По существу, это была полнейшая научная катастрофа, крах тех положений, которые составляли основу классической физики, хотя в то время ученые еще не вполне ясно представляли себе это. Первым, кто понял всю катастрофичность такого положения вещей и осознал необходимость каких-то решительных, новых выводов, был Макс Планк» [20]. Конечно же, никакой «катастрофы» не было, а просто было неверное, совершенно ошибочное решение задачи, предложенное Рэлеем. Авторитет лорда-ученого был велик.

аргумент в функцию  $U(\nu, T)$ . В классической термодинамике для этих целей имеет место “классический треугольник”:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS \quad (4.24)$$

(дифференциальная пфаффова форма для квазистатического элемента теплоты всегда имеет интегрирующий множитель, зависящий только от температуры системы [23]).

Положа руку на сердце, очень хотелось бы узнать, несмотря на то, что М. Планк пытался узаконить понятие электромагнитной температуры, что такое температура линейного осциллятора. Очевидно, температура стенки полости, так как нигде это особенно не обсуждается; то есть ясно, что температура всего ансамбля линейных осцилляторов, образующих некоторый макроскопический элемент полости, т. е. параметр как бы “внешний” по отношению к конкретному осциллятору. Трудно говорить о “внутренней” температуре осциллятора, это все равно, что обсуждать “внутреннюю” температуру изолированного атома. Тогда, в этой связи, о какой энтропии идет речь? О “внутренней” энтропии осциллятора как сложной термодинамической (или статистической) системы? Или об ансамбле осцилляторов (которые в свою очередь реально, физически, на поверку являют собой суть атомы и электроны), образующих макроскопический фрагмент стенки полости? Если уж говорить о “безупречной логике”, то почему бы не пояснить лишний раз, что представляет собой энтропия линейного гармонического осциллятора (между прочим, нигде и ничего по этому поводу не обнаруживается). Конечно и вообще говоря, в классической термодинамике имеют место *математические обоснования существования энтропии и абсолютной температуры*, однако здесь-то речь идет, прежде всего, о *физическом толковании*. Так вот последнее представлено как раз слабо.

**3. Статистический этап.** На самом деле правильнее было бы сказать, что это Макс Планк считал, что данный этап статистический. М. Планк прекрасно понимал, что «справиться» с энтропией можно только статистически, обратившись для этого к законам комбинаторики. Но что комбинировать? И вот, явно следуя Больцману, Планк постулирует соотношение<sup>15</sup>  $S_N = k \ln W_N$ , где  $W_N$  – число распределений, совместимых с

<sup>15</sup> Дабы избежать некоторых неуместных исторических спекуляций, сошлемся на основательное исследование Абрахама Пайса [24]: «На надгробии Больцмана, который похоронен на центральном кладбище Вены, выбито:  $S = k \log W$ . Неважно, что не Больцман записал это уравнение в таком виде. Впервые это сделал Планк... Константу  $k$  также ввел Планк, а не Больцман. Символ  $k$  был введен в XX в. и впервые использован в формуле Планка (4.12) для распределения энергии в спектре излучения черного тела, предложенной 14 декабря 1900 г. Уравнение  $S = k \ln W + const$  впервые также появилось в статье Планка, законченной несколькими неделями позже. Лоренц до 1911 г. называл  $k$  *постоянной Планка*, причем так же поступали и другие... Далее, почему Больцман сам не ввел символ  $k$ ? Ведь в его статье 1877 г. имеется раздел, озаглавленный «Связь энтропии с величиной, которую я назвал вероятностью распределения». Этой величиной, по сути,

энергией системы (термодинамическая вероятность),  $N$  – число (большое) осцилляторов, имеющих одинаковую частоту  $\nu$ ,  $S_N = NS$  – полная энтропия системы,  $U_N = NU$  – полная энергия.

Чтобы иметь возможность определить  $W_N$ , Планк должен был решить задачу комбинаторики. Так что же, еще раз, комбинировать?

Как известно, Л.Э. Больцман в свое время «определял наиболее вероятный способ, которым заданное число различных молекул газа с фиксированной полной энергией может быть распределено по ячейкам фазового пространства. Соответствующая задача подсчета не имеет ничего общего с методом подсчета Планка, при котором выполняется распределение неразличимых объектов – порций энергии. Этот новый метод подсчета... никак не укладывается в рамки классического мышления. Планк не только понимал это, но и прямо заявил: «Опыт покажет, реализуется ли эта гипотеза в природе» [25].

Таким образом, М. Планк принимает, что полная энергия  $U_N = NU$  состоит из целого числа  $P$  “элементов энергии”  $\varepsilon$  (у него так и написано – “Energieelementen”), так что  $U_N = P\varepsilon$ . До сих пор считалось, что классическое традиционное представление об энергии  $U_N$  (как о непрерывной величине) не допускало применения комбинаторики для определения  $W_N$ , которое представляет по Планку число способов распределения (размещения)  $P$  неразличимых порций энергии по  $N$  различным осцилляторам. Самый простейший пример: для  $N=2, P=3$  реализуются такие размещения -  $(3\varepsilon, 0)$ ,  $(2\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $(\varepsilon, 2\varepsilon)$ ,  $(0, 3\varepsilon)$ . В общем случае получим:

$$W_N = \frac{(N-1+P)!}{P!(N-1)!}, \quad (4.25)$$

что в комбинаторике известно как схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями.<sup>16</sup> Подставим это выражение в формулу (4.18) и, считая, что  $N$  и  $P$  достаточно велики, воспользуемся приближением Стирлинга:

является  $\ln W$ . Более того, в этом же разделе он отмечает, что  $\ln W$  «совпадает с энтропией с точностью до постоянного множителя и аддитивной постоянной». Мне кажется, что Больцман не получил уравнения  $S = k \ln W + const$  из-за того, что его занимало не столько применение [этого] уравнения к практическим расчетам, сколько осознание смысла второго закона термодинамики».

<sup>16</sup> Если возникает необходимость в воспроизведении справочного материала по комбинаторике, то можно ограничиться следующей информацией. Лучше, вообще говоря, абстрактно вести речь о случайном размещении  $P$  неразличимых шаров (вместо квантов) по  $N$  различным ящикам (вместо осцилляторов). В этом случае число различных размещений равно числу способов выбора  $P$  мест из  $N+P-1$ , т. е.  $W_N = C_{N+P-1}^P = \frac{(N+P-1)!}{P!(N-1)!}$ ,

что легко доказать, обозначив шары звездочками и изобразив  $N$  ящиков в виде  $N$  промежутков между  $N+1$  вертикальными черточками, например: I\*\*\*I \* I I I I\*\*\*\*I – или, словами, ящики содержат соответственно 3, 1, 0, 0, 0, 4 шаров. Вероятность такого

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi n} + n \ln n - n + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.26)$$

Получим в результате:

$$S = k \left[ \left(1 + \frac{P}{N}\right) \ln \left(1 + \frac{P}{N}\right) - \frac{P}{N} \ln \frac{P}{N} \right], \quad (4.27)$$

а если считать, что  $U_N = NU = P\varepsilon$ , то окончательно имеем

$$S = k \left[ \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon} \right]. \quad (4.28)$$

Сравнение формул (4.18) и (4.28) приводит нас еще к одному знаменательному результату:

$$\varepsilon = h\nu. \quad (4.29)$$

Или в обратном порядке, если исходить из предпосылок, определенных соотношениями (4.25) – (4.29), то можно вернуться к формуле (4.18), а, следовательно, и к *закону излучения Планка*. Далее, памятуя о том, что «нет пророков в своем отечестве», вновь перепоручаем слово А. Пайсу, так как лучше его уже и не скажешь [27]: «На самом деле Планк предпринял не один, а два “шага отчаяния”. Во-первых, Планк сделал неслыханную вещь, приписав физический смысл конечным “порциям энергии” [формула (4.29)]. Во-вторых, он использовал также небывалую процедуру подсчета, описываемую уравнением (4.25). По мнению Планка, «электромагнитная теория излучения не дает нам отправного пункта, который позволял бы

выбора:  $p(A) = \frac{1}{C_{N+P-1}^P} = \frac{P!(N-1)!}{(N+P-1)!}$  (это теперь известно нам как статистика Бозе-

Эйнштейна). Если в одном ящике не могут находиться два и более шаров, получим  $p(A) = \frac{1}{C_N^P} = \frac{(N-P)!P!}{N!}$  (статистика Ферми-Дирака). Наконец, под статистикой Максвелла-

Больцмана принято считать определение вероятности в соответствии с формулой

$p(A) = \frac{P!}{N^P}$ . Простейший пример [26]: пусть  $N = 5, P = 3$ . Рассмотрим размещение А: I\*I-I\*I\*I-

I. Статистика Максвелла-Больцмана:  $p(A) = \frac{6}{125} = 0,048$ . Статистика Бозе-Эйнштейна:

$p(A) = \frac{1}{35} \approx 0,029$ . Статистика Ферми-Дирака:  $p(A) = \frac{1}{10} = 0,1$ .



говорить о конкретной вероятности [ $W_N$ ]]. Это утверждение, конечно же, неверно...

Единственным оправданием двух отчаянных шагов служит то, что они позволили Планку получить желаемый результат. Его подход был безумным...» Вот тут, казалось бы, самый раз поставить точку, однако А. Пайс решается на эмоциональную эскападу какого-то чуть ли не религиозного толка: «...но это безумие имело тот божественный оттенок, который привносят в науку только крупнейшие фигуры в переломный период. Это “безумие” сделало Планка консерватора по характеру, революционером поневоле».

Однако такой вот примечательный факт – несмотря на то, что М. Планк с 1902 г. избирается неперменным секретарем Прусской Академии наук, то есть фактически является ключевой фигурой в европейской (а значит, и в мировой) теоретической физике, до поры до времени его теории воспринимаются научной общественностью несколько прохладно. Например, «в 1908 г. вторым изданием вышел обширный «Справочник по истории естествознания и техники» Людвиг Дармштедтера. В нем подробно рассмотрено 120 открытий, относящихся к 1900 г. Однако имя Макса Планка там даже не упомянуто. В третьем издании классического учебника Нернста «Теоретическая химия» (1904) Планк упоминался три раза» [28].

Всю вторую половину XIX века проблема излучения абсолютно черного тела представляла собой передний край науки, направление «главного удара». В начале XX века экспериментаторы имели возможность уточнить степень достоверности формулы Планка. Известно признание Эрнста Прингсгейма, которое он выразил в своей статье от 1903 г. [29]: «Уравнение Планка настолько хорошо согласуется с экспериментом, что его можно считать, по крайней мере с высокой степенью приближения, математическим выражением функции Кирхгофа».

Таким образом, если что-то и можно было бы утверждать наверняка о теории М. Планка, так это то, что она скорее всего не нуждалась в математической модернизации, так как с формальной математической точки зрения гарантировала высокую точность, а нуждалась в приемлемой физической интерпретации. Принято считать, что после 1901 г. в теории Планка ничего не происходило до тех пор, пока Эйнштейн не выдвинул в 1905 г. гипотезу световых квантов [30]: «Я и в самом деле думаю, что опыты, касающиеся «излучения черного тела», фотолюминесценции, возникновения катодных лучей при освещении ультрафиолетовыми лучами и других групп явлений, связанных с возникновением и превращением света, лучше объясняются предположением, что энергия света распределяется по пространству дискретно. Согласно этому сделанному здесь предположению, энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем объеме, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком».

Берем на себя смелость утверждать, что и после 1905 г., вплоть до I Сольвеевского конгресса (1911 г.), гипотеза Планка большинством физиков не принималась безоговорочно. Дело, очевидно, в том, что авторитет А. Эйнштейна, безусловный для второй половины XX века, не был столь велик для современников, поскольку двадцатилетний эксперт Бернского патентного бюро делал в науке только первые шаги. Тем более что гораздо позже, в 1912 г., когда М. Планк решит пригласить А. Эйнштейна для сотрудничества в Берлин, по инициативе Планка будет составлено представление об избрании Эйнштейна в Прусскую Академию наук: «... среди больших проблем, которыми так богата современная физика, не существует ни одной, в отношении которой Эйнштейн не занял бы примечательной позиции». И далее там же, что характерно, по поводу квантовой гипотезы Эйнштейна говорится как о “заблуждении” [так что Эйнштейн мало чем мог бы «помочь» Планку в 1905 году]: «То, что он в своих рассуждениях иногда выходит за пределы цели, как, например, в своей гипотезе световых квантов, не следует слишком сильно ставить ему в упрек. Ибо, не решившись пойти на риск, нельзя осуществить истинно нового, даже в самом точном естествознании» [31].

Начало XX века в физике – это прежде всего борьба идей, глубокие преобразования, кризисные явления, которые необходимо было преодолеть в кратчайшие сроки и любой ценой. Осознавая это, Макс Планк и Вальтер Нернст выступили с идеей созыва международного конгресса физиков; последний, будучи моложе Планка на 6 лет, взял на себя организационную часть. Финансировал конгресс бельгийский промышленник, изобретатель, химик-самоучка Эрнест Сольве, отчего и мероприятие получило наименование I Сольвеевский конгресс, состоявшийся в 1911 г. с 30 октября по 3 ноября в Брюсселе, в центре внимания которого оказалась проблема «Излучение и кванты».

О работе I Сольвеевского конгресса написано немало исторических очерков и хроник. Однако обратимся сразу к существу проблемы, которая пронизывала дух конгресса и является целью нашего нынешнего исследования.

Доклад под заголовком «Законы теплового излучения и гипотеза элементарного кванта действия» был прочитан Планком в Брюсселе на I Сольвеевском конгрессе по физике в 1911 г. Здесь же состоялась и дискуссия по данному докладу с участием ведущих физиков мира. Текст доклада и дискуссия по нему были опубликованы впервые на французском языке в 1912 г. в Париже [32]. Просмотренный Планком немецкий перевод опубликован в книге [33], материалы Конгресса на русском языке представлены в работе [34].

Интересно отметить, что на этом конгрессе Эйнштейн достаточно резко выступает против формальной квантовой гипотезы Планка. Вот его слова: «Мне чужд тот способ, которым Планк применяет уравнения Больцмана, вводя вероятность состояния  $W$  и не давая этой величине физическое определение. Если так идти дальше, то уравнение Больцмана не имеет

никакого физического содержания. То обстоятельство, что  $W$  принимается равным числу комбинаций, принадлежащих состоянию, тут ничего не меняет, ибо не объясняется, что означает утверждение о равной вероятности двух каких-либо комбинаций. Даже если удастся так определить комбинацию, что выведенная из больцмановского уравнения энтропия будет соответствовать обычному определению, мне кажется, что использованный Планком метод введения принципа Больцмана не позволит сделать какие-то выводы о справедливости элементарной теории на основе совпадения ее данных с экспериментально установленными термодинамическими свойствами системы».

Здесь Эйнштейн ясно дает понять, что формальная подгонка теории под эксперимент еще не гарантирует правильности самой теории, тем более, если в основу этой теории закладываются довольно сомнительные доводы. Эту же тему продолжает г-жа Мария Кюри:

“Предполагает ли Планк, что испускание элемента энергии происходит мгновенно? В таком случае представляется невозможным сохранить уравнение Максвелла даже для пустоты”.

Г. Лоренц: “Испускание может происходить за большое число колебаний”.

Г-жа Кюри: “Тогда можно попытаться придумать механизм, с помощью которого удавалось бы прервать испускание. Впрочем, по-видимому, подобные механизмы не нашего масштаба и сравнимы с демонами Максвелла. Они могли бы способствовать отклонениям от статистических законов излучения, подобно тому, как демоны Максвелла могут осуществить отклонения от следствий принципа Карно”.

А. Пуанкаре: “Я хотел бы привести в качестве примера разряд осциллятора Герца, начинающегося мгновенно, но продолжающегося конечное время”.

М. Планк: “Когда испускание осциллятора осуществляется квантами, то справедливость уравнений Максвелла сохраняется для окружающего пространства на некотором расстоянии от осциллятора, но они должны быть изменены внутри осциллятора и в непосредственной близости от него (можно, например, предположить, что скорость распространения внутри осциллятора намного меньше, чем в пустоте).

Квантовая гипотеза ничего не утверждает относительно локализации кванта энергии в пространстве; он может простирается на большое число длин волны. Необходимо точно определить лишь момент начала излучения кванта осциллятором”.

А. Эйнштейн: “Если осциллятор излучает иначе, чем принял Планк в своей первой теории (в 1900 г.), то из этого следует отказ от уравнений Максвелла в непосредственной близости от осциллятора, ибо, применяя уравнения Максвелла к квазистационарному полю осциллирующего диполя, неизбежно приходят к испусканию энергии сферическими волнами”.

А. Зоммерфельд: “Мне кажется, что гипотезу испускания квантами, как и первоначальную гипотезу квантов энергии, нужно рассматривать

скорее как форму изложения, чем как выражение физической реальности. Я думаю, в частности, что нашел противоречие (см. конец моего доклада) между новой гипотезой Планка и экспериментальными данными об испускании рентгеновских лучей”.

Г. Лоренц: “Я хотел бы спросить Планка, каким образом он хочет изменить фундаментальные уравнения электронной теории?”

М. Планк: “Я не могу пока еще представить определенную теорию. Если нужно все же сказать несколько слов о направлении, в котором возможно, по моему мнению, вести необходимую модификацию для приведения уравнений электродинамики в согласие с квантовой теорией, то я хочу высказать следующую гипотезу. Обычные уравнения электромагнитного поля точны вне линейного осциллятора, но для колебаний самого осциллятора между двумя испусканиями справедливо простое уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + nx = eF_x \text{ ”.} \quad (4.30)$$

П. Ланжевен: “Надо заметить, что, отказываясь в уравнении движения электрона от члена, выражающего реакцию излучения, теряется преимущество отмеченного Лоренцем замечательного соотношения между затуханием, выраженным этим членом, и экспериментально найденным пределом интерференции. Трудно допустить присутствие этого члена, когда электрон излучает, и отсутствие его, когда электрон поглощает”.

В. Вин: “При допущении очень слабого затухания вновь встречается трудность с большим временем накопления. Особо слабое затухание должно рассматриваться как статистически очень редкое явление; обычно же по Лоренцу, затухание, слабое само по себе, сильно увеличивается вследствие столкновения молекул с электронами. Радиационное затухание исчезает, если осциллятор может испускать лишь элементы энергии”... “Из допущения, что слагаемое, обусловленное испусканием, для колебания одного электрона исчезает, и что оно заменяется испусканием кванта, следует, что и колеблющийся под действием известных внешних сил электрон испускает кванты. Это несовместимо с теорией Максвелла, даже если считать ее справедливой только вне электрона. Следовательно, мы вынуждены были бы отказаться от справедливости уравнений Максвелла внутри атома”.

Г. Лоренц: “Мне кажется, не следует придавать слишком много значения тому, что постоянная  $h$  обладает размерностью действия. Она имеет также и размерность величины  $e^2/c$ , где  $e$  – электрический заряд в единицах электростатической системы ( $c$  – скорость света). Таким образом, в формуле черного излучения можно было бы заменить  $h$  этим выражением  $e^2/c$ . Если бы уравнение было представлено в таком виде, мы пришли бы к мысли, что универсальный элемент, который мы ищем, должен быть не определенным действием, а определенным электрическим зарядом”.

М. Планк: “В принципе могу лишь присоединиться к такой точке зрения. Я пришел к тому, чтобы рассматривать величину  $h$  в качестве

универсальной постоянной, вследствие роли, которую она играет в выражении для вероятности. Мне кажется вполне возможным, что более точное знание элементарных законов может привести к выражению  $h$  через  $e$  и  $c$  или, наоборот,  $e$  через  $h$  и  $c$ ”.

К этому стоит добавить и такой факт, что постоянная Планка  $h$  имеет не только размерность некоего действия или может быть выражена через электромагнитные константы, как это было замечено Лоренцем, но  $h$  имеет и размерность такой всем хорошо известной физической величины как механический момент или момент количества движения.

Таким образом, мы ясно видим, что квантовая гипотеза Планка столкнулась с серьезными противоречиями в отношении теории Максвелла и Лоренца. Она вызвала также решительные возражения ведущих физиков, стоящих на твердых позициях фундаментальной физики и не приемлющих абстрактные построения теории. По характеру дискуссии мы хорошо видим, что ситуация складывается отнюдь не в пользу гипотезы Планка. Особенно это касается вопроса разрыва Планка с электродинамикой Максвелла-Лоренца, достаточно хорошо проверенной к тому времени.

Однако задача осталась нерешенной, и все эти неопределенности в новой теории сохранились на многие десятилетия, дожидаясь своего разрешения в более четкой фундаментальной теории. Противоречия с электродинамикой были не единственными трудностями теории Планка, о чем свидетельствуют и другие примеры в дискуссии на I Сольвеевском конгрессе.

Г. Лоренц: “Не предпочтительнее ли начать с определения вероятности? Можно вообразить, например, что система проходит через все состояния, совместимые с некоторым заданным значением суммарной энергии; тогда время, в течение которого система находится в определенном состоянии, могло бы служить мерой вероятности этого состояния”.

Здесь Лоренц явно старается вернуть Планка от абстракций к физике, к реальности, где можно рассуждать вполне логически, не разрушая и не опровергая каких-либо фундаментальных положений или теорий. Ведь всякая новая теория в тот момент, когда она еще никому не понятна, не имеет ни малейшего права на коренную ломку устоявшихся и хорошо проверенных фундаментальных теорий до полного выяснения всех обстоятельств, породивших возникшие недоразумения.

М. Планк: “Безусловно, было бы желательно дать годное во всех случаях определение термодинамической вероятности, но при современном уровне наших знаний сделать это фактически невозможно. В частности, я не думаю, что можно дать общее определение термодинамической вероятности через флуктуации энергии в пространстве или во времени. В самом деле, это определение было бы неприменимо в случае черного излучения, по крайней мере если признать, как показано в моем докладе, что энтропия излучения должна быть вычислена на основе законов испускания и поглощения, а не исходя из флуктуаций энергии излучения.

Все же трудность не представляется непреодолимой, и положение видится мне следующим образом: несомненно, нужно видоизменить уравнения

классической механики, чтобы привести их в соответствие с эмпирически найденными законами излучения. Но в каком направлении следует вводить изменения, или, выражаясь конкретно, как сделать выбор между уравнениями, которые следует оставить в новой теории, и теми, которые подлежат изменению. Этот вопрос остается открытым... Следовательно, чтобы сохранить больцмановское соотношение между энтропией и вероятностью, определяя последнюю подходящим образом, например подсчетом числа комбинаций, вопрос о физическом определении вероятности нужно оставить пока открытым”.

“Таким образом, проблема упирается в следующее: каким способом следует вычислить вероятность, чтобы с помощью соотношения Больцмана получить энтропию излучения, согласующуюся с данными опыта? Если будет найдено общее решение этого вопроса, то тем самым найдем и правильное вообще физическое определение вероятности”.

Против этого невозможно возразить. Просто лучше Планка и не скажешь! Следовательно, Планк признает, что задача еще очень далека от решения, что с определением вероятности состояния системы и энтропии по Больцману совершенно не ясно, а поэтому нужно напрячь все силы для разрешения возникших трудностей. И Планк готов даже к тому, чтобы перестроить всю физику, изменить законы движения материальных тел, пожертвовать фундаментальной теорией Максвелла-Лоренца, а также и другими законами физики, для того чтобы довести решение задачи до конца.

А. Пуанкаре: “Можно себе представить атомы материи и атомы электричества, поскольку имеет место сохранение материи и сохранение заряда. Можно представить себе также и атомы энергии, ибо имеет место сохранение энергии. Но как утверждать, что имеет место сохранение действия?”

Г. Лоренц: “Способ, которым Планк вводит теперь постоянную  $h$ , весьма примечателен. И все же следует отметить, что исторически квант энергии имеет приоритет перед квантом действия. Действительно, Планк начал с того, что ввел для каждого осциллятора определенный квант энергии, а затем предложил считать его пропорциональным  $\nu$ , чтобы добиться согласования с законом Вина”.

Очень уместное замечание. К этому можно добавить следующее: вначале появились второй закон Ньютона и его уравнение, связывающее силу  $F$ , массу  $m$  и ускорение  $a$  материального тела:  $F = ma$ .

Было введено понятие силового потенциального поля  $U$  и при этом сила выражается как  $F = - \nabla U$ . Следствием из второго закона Ньютона является понятие полной энергии тела  $E$  как первый интеграл движения. Полная энергия, в свою очередь состоит из потенциальной  $U$  и кинетической  $K$  энергий. В этом и заключается закон сохранения полной энергии  $E$  материального тела или в системе, состоящей из многих тел. И лишь значительно позднее с развитием теории Лагранжа и вариационных методов в механике было введено в физику понятие функции действия  $S = \int L dt$  с использованием функции Лагранжа  $L = K - U$ . Тогда же стали говорить о

принципе наименьшего действия и просто о действии. Таким образом, мы видим, что энергия в физике занимает главенствующее положение. Поэтому формально квантовать действие, имеющее вторичное после энергии значение, и не вкладывать в это какого-либо физического содержания, каких-либо законов механики не имеет ни малейшего смысла. Однако вернемся к другим замечаниям ученых.

В. Вин: “Планковскому осциллятору недостает одного важного свойства реальных молекул, а именно способности менять длину волны излучения; без этого свойства было бы невозможно равновесие излучения. Наоборот, связанные резонаторы различной частоты могут произвести нужное изменение длины волны излучения. Но подобные резонаторы не учитываются в вычислениях Планка, и сомнительно, что получилось бы фундаментальное соотношение между излучением и плотностью энергии, если их ввести”...

“Трудности первой теории Планка обусловлены большим временем накопления, требуемым, чтобы осциллятор при слабом облучении получил целый элемент энергии... может быть, некоторое облегчение принесет введение связанных резонаторов”.

М. Планк: “Я не думаю, что трудность с поглощением целых квантов энергии удастся устранить допущением о сосредоточении нескольких осцилляторов в большой конгломерат, считая вместе с тем, что обмен энергией между осцилляторами происходит только через излучение. При низких температурах излучение столь слабое, что для поглощения целого кванта энергии, как конгломератом, так и отдельным осциллятором, потребовалось бы слишком длительное время, и о мгновенном поглощении нельзя было бы говорить. С другой стороны, надо считать, по крайней мере, весьма вероятным, что даже при самых низких температурах теплообмен осуществляется только излучением”.

Хорошо видно, что в своих построениях теории Планк ограничивает сам себя. Его абстрактные изолированные осцилляторы, настроенные лишь на определенные частоты, не справляются с проблемой перестройки частоты в излучающей полости. Он всячески отбрасывает возможный механизм обмена энергией между осцилляторами помимо излучения. В настоящее время процессы безызлучательной передачи энергии от центра к центру хорошо известны. Это могут быть и самые обычные столкновения колеблющихся атомов или молекул в кристаллической решетке твердого тела. Однако Планк слишком далек от реальной физики, на которую его всеми силами пытаются навести участники этой дискуссии.

А. Пуанкаре: *“Если бы существовали только неподвижные резонаторы (эффект Доплера не проявлялся бы) и эфир, то был бы немислим обмен энергией между лучами различного периода. Распределение энергии в спектре нельзя было бы менять, и оно стремилось бы к какому-то определенному закону. Следовательно, надо допустить другой механизм обмена между резонаторами различного периода. Если обмен происходит прямо между двумя резонаторами с частотами  $\nu$  и  $\nu_1$ , то передаваемая от*

одного к другому энергия должна быть одновременно целым кратным  $h\nu$  и  $h\nu_1$ , что в общем случае невозможно. *Если же существует посредник (эту роль могут играть, например, атомы обычной материи), то для устранения той же трудности пришлось бы допустить, что энергия этого посредника может меняться произвольным образом*<sup>17</sup>.

М. Планк: *“Посредниками могли бы быть электроны... Пока осциллятор поглощает лишь энергию излучения, прирост его энергии пропорционален времени. Если же он обменивается энергией с электроном или атомом путем столкновения, то мы не можем пока сказать ничего определенного о законах этого обмена. Но я не сомневаюсь в возможности развить теорию так, чтобы удалось показать, что значение энергии системы осцилляторов не меняется, даже если учитывать и эти виды обмена”*...

Остановимся на этом примечательном месте дискуссии и подведем некоторый итог. Мы со всей отчетливостью видим, что участники дискуссии на I Сольвеевском конгрессе при помощи подсказок буквально навели Планка на правильный путь решения задачи, и Планк уже сам, правда, не замечая этого, как никогда близок к окончательному решению данной проблемы без каких либо противоречий с классической физикой. Он буквально в двух шагах от полного завершения задачи, но, увы!!! Формальная квантовая гипотеза одержала над Планком и над другими физиками свою роковую победу... А ведь каждый из них мог еще вмешаться в ход рассуждений и внести свой решающий вклад. Момент, признаемся откровенно, просто исторический!

Один из самых маститых русских физиков Николай Алексеевич Умов, длительное время (начиная с 1896 г.) возглавлявший кафедру физики Московского университета, так отозвался об итогах Сольвеевского форума [35]: «Здесь обнаружилось, что теории излучения основываются частью на старых, частью на новых учениях, что они не представляют цельности в своих методах и не могут быть рассматриваемы как окончательные». Сохранились также свидетельства активного пропагандиста и популяризатора научных знаний Владимира Константиновича Лебединского, который выступил с пространной статьей в «Журнале Русского физико-химического общества» за 1914 г. Точка зрения Лебединского, нашедшая, в частности, отражение в данной статье, такова, что-де кванты – это только логическое, математическое, формальное звено в теоретических рассуждениях. Поэтому он решительно возражает против распространения квантовой гипотезы на другие области физики, кроме данной конкретной задачи излучения. Более того, автор статьи утверждает, что решительно не находит экспериментальных подтверждений существования квантов, хотя и упоминает идеи и работы А. Эйнштейна.

А вот другая, можно сказать, диаметрально противоположная оценка, сформулированная в том же 1914 г. в Бирмингеме на собрании Британской

---

<sup>17</sup> Выделено нами. – Авт.



ассоциации.<sup>18</sup> Мы находим, что «Пуанкаре и Джинс выразили общее мнение, показав, что изменения энергии должны происходить скачками, как это признают Планк, Эйнштейн и Бор» [36]. Однако с последней декларацией все более или менее ясно – там, где появляется Н. Бор со своей теорией водородоподобного атома, основанной на двух его знаменитых постулатах, следует вести обстоятельный разговор, но уже по иной и весьма обширной тематике. Совершенно очевидно другое – М. Планка I Сольвеевский конгресс не удовлетворил в полной мере, так как не дал четких и определенных результатов. Дальнейшие мучительные поиски путей усовершенствования собственной гипотезы квантов кратко отразили наши известнейшие исследователи Е.М. Кляус и У.И. Франкфурт, которые в свою очередь ссылаются на работы М. Планка [37] и Л.С. Полака [38]: «Вскоре Планк предложил так называемый *второй вариант своей теории*, в котором испускание еще предполагалось дискретным, но поглощение считалось уже непрерывным. 16 декабря 1911 г., выступая в Немецком химическом обществе с докладом «Новейшие теории в термодинамике», Планк говорил: «По-моему, совершенно не будет противоречить гипотезе квантов, если мы будем представлять себе, что в случае совершающего периодические колебания молекулярного осциллятора только испускание энергии происходит в виде квантов, поглощение же, по крайней мере в случае лучистой теплоты, происходит, напротив, совершенно непрерывно».

Эту теорию подверг критике Анри Пуанкаре в своей предсмертной статье «Гипотеза квантов» (1912). Окончательно она была «отвергнута, когда опытами Франка и Герца была установлена полная аналогия между оптическим поглощением и столкновениями электронов с молекулами. В 1914 г. Планк, продолжая отступление на позиции классической физики, развил новую гипотезу, так называемую *третью теорию*, согласно которой испускание, так же как поглощение излучения осциллятором, есть процесс непрерывный, подчиняющийся законам классической электродинамики. Квантовая прерывность, согласно этой теории, имеет место только при обмене энергии при столкновении осциллятора со свободными частицами вещества. В 1915 г. он отказался от этой теории, так как расчеты Фоккера<sup>19</sup>

---

<sup>18</sup> Так как даты жизни Анри Пуанкаре известны совершенно точно (23.IV.1854 – 17.VII.1912) – тут как-то поневоле возникает недоумение, а именно, речь-то идет о какой-то случайной ошибке, или, все-таки, имеет место манипуляция общественным (научным) мнением.

<sup>19</sup> Сейчас уже несколько подзабытый нидерландский физик Адриан Даниэль Фоккер (17.08.1887 – 1972), являясь учеником Х.А. Лоренца, в 1913 г. только-только окончил Лейденский университет, сразу защитив докторскую диссертацию, посвященную броуновскому движению электронов в поле излучения, где и появилось уравнение, которое в дальнейшем получило наименование уравнения Фоккера – Планка. В дальнейшем Фоккер некоторое время сотрудничал в Цюрихе с Эйнштейном, когда они объединенными усилиями делали первые попытки усовершенствования с применением тензорного анализа релятивистской теории гравитационного поля, предложенной финским физиком Гуннаром Нордстрёмом. Удивительно, что «вчерашний» (25-летний) студент «ставит на место» профессора Макса Планка. Довод какой-то явно не серьезный.

показали, что полученная, согласно классической электродинамике, картина стационарных состояний твердого электрического диполя ведет к прямому противоречию с экспериментом».

Справедливости ради, следует напомнить, что критические замечания в адрес гипотезы квантов Планка со стороны коллег-физиков раздавались еще задолго до I Сольвеевского конгресса, что, в общем-то, и стимулировало созыв этого международного форума. Возможно, впервые на непоследовательность доводов Планка указал А. Эйнштейн в 1906 г. [39], отметивший логическую несовместимость электромагнитной (или, как вариант, электродинамической) и статистической частей вывода основной формулы Планка. Действительно, – и об этом уже говорилось выше – в электромагнитной части вывод закона излучения основывался полностью на теории Максвелла и предположении, что энергия осциллятора, или диполя Герца, является непрерывно изменяющейся величиной. Тогда как в статистической части вывода та же самая энергия рассматривается как дискретная величина, способная принимать лишь значения, кратные  $h\nu$ . А это полностью противоречит электромагнитной теории Максвелла, проверенной к тому времени достаточно хорошо.

Чтобы как-то разрешить этот парадокс, Эйнштейн заключает: «...хотя теория Максвелла неприменима к элементарным резонаторам, но средняя энергия резонатора, находящегося в поле излучения, равна энергии, вычисленной по максвелловской теории электричества».

«Это последнее предположение, – продолжает Эйнштейн, – было бы вполне приемлемым, если бы во всех областях спектра, доступных опыту, величина  $\varepsilon = h\nu$  была мала по сравнению со средней энергией резонатора  $U$ ; но это вовсе не так». Тремя с половиной годами позже на 81-м съезде Немецкой ассоциации ученых Эйнштейн повторяет критику цепочки рассуждений Планка: «Простым вычислением мы находим, – сказал он, – что отношение  $\varepsilon/U$  для длины волны 0,5 мкм и абсолютной температуры  $T = 1700$  К не только не мало, но даже очень велико по сравнению с единицей. Оно имеет значение примерно  $6,5 \cdot 10^7$ » [40].

Таким образом, в теории Планка возникает вопиющее противоречие. Каким образом огромная энергия  $n h\nu$ , где  $n$  может быть очень большим числом достается одному осциллятору с ничтожно малой средней энергией  $U$ ? Кроме этого, добавим, что частота  $\nu$  в спектре излучения изменяется непрерывно от нуля до бесконечности без каких-либо выделенных гармоник, и становится совершенно непонятным и нелогичным, чтобы отдельный осциллятор имел в своем запасе огромное количество таких частот. Получается так, что в видимой области спектра осциллятор может возбудиться до огромной энергии  $n h\nu$ , сравнимой с энергией жесткого рентгеновского излучения, но излучить при этом он сможет только малый “кусочек” этой энергии  $h\nu$ , а остальная энергия осциллятора  $(n-1)h\nu$  как бы “заморожена” и не может быть реализована ни в каком виде, хотя бы в

безызлучательных процессах. Такого явления в природе мы еще не встречали.

Хорошо известно, что в твердом теле, особенно в кристаллах, очень сильно развиты безызлучательные процессы переноса энергии от одного возбужденного центра к другому с частичной или полной диссипацией энергии в кристаллическую решетку либо с излучением этой энергии. Кроме этого, можно задать вопрос: какой атом или молекула способны возбудиться до огромной энергии  $nh\nu$ , и при этом они сохраняются, не разрушившись? Видимо, в данной теории заканчивается какая-либо разумная физика и начинается абстрактное моделирование, не имеющее ничего общего с реальными явлениями. Произошло это, по всей вероятности, из-за того, что никто в то время не предложил настоящего, т.е. свободного от каких-либо противоречий решения данной задачи.

Эйнштейн же не считал эту непоследовательность основанием для того, чтобы отвергнуть квантовую теорию Планка как таковую. К этому времени он уже выдвинул идею о световых квантах, т.е. еще дальше продвинулся в направлении разрыва с теорией Максвелла. В рассмотренной непоследовательности теории Планка Эйнштейн видел указание на то, что должны быть пересмотрены основы традиционной теории излучения, основанной на электромагнитной теории Максвелла. Таким образом, критика Планка Эйнштейном – это всего лишь критика “слева”, даже более того, нетрудно почувствовать атмосферу подыгрывания друг другу. А иначе как расценивать высказывания: «Тогда мне показалось, что теория излучения Планка в известном смысле противостоит моей работе. Однако... теория Планка в действительности неявно использует упомянутую выше [мою] гипотезу световых квантов» [41].<sup>20</sup> И далее §1 этой же статьи А. Эйнштейн, как истый революционер физики, завершает выводом: «Изложенные выше рассуждения, по моему мнению, отнюдь не опровергают теорию излучения Планка; напротив, они, по-видимому, показывают, что Планк в своей теории излучения ввел в физику новый гипотетический элемент – гипотезу световых квантов».

Совсем иное дело, что М. Планк не считал себя революционером и не желал окончательно порывать с классической физикой. Он вновь и вновь возвращался к задаче излучения, выстраивал, как ему казалось, удачные модели абсолютно черного тела, механизмы перераспределения энергии в резонаторах. Тщетно. Непоследовательность рассуждений Планка можно обнаружить на примере следующего анализа волновых явлений [42]: «Представим себе поверхность воды, на которой сильный ветер подымает высокие волны. После того как ветер прекратится, волны остаются еще некоторое время и двигаются от одного берега к другому. При этом произойдет одно характерное изменение. Энергия движения больших, высоких волн будет все больше превращаться, особенно после отражения от

---

<sup>20</sup> Да кто же в этом сомневался?! Однако какая досада, что Планк – это 1900 г., а Эйнштейн – это 1905 г.

берега или других твердых преград, в энергию движения коротких, мелких волн. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока, наконец, волны не станут так малы, движения так слабы, что они будут совершенно незаметны... Представим себе, что совершенно аналогичный процесс происходит не с водяными волнами, а с волнами светового или теплового излучения. Допустим, что лучи, испускаемые раскаленным телом, собираются в замкнутом сосуде посредством отражения и движутся в нем взад и вперед, регулярно отражаясь от зеркальных стен сосуда. В этом случае также произойдет постепенное превращение лучистой энергии длинных волн в энергию коротких волн, упорядоченного излучения – в неупорядоченное. Длинным волнам соответствуют инфракрасные лучи спектра, коротким волнам – ультрафиолетовые лучи. Согласно классической теории, приходится заключить, что вся лучистая энергия перейдет под конец в ультрафиолетовую часть спектра, или что инфракрасные и даже видимые лучи постепенно исчезнут и превратятся в невидимые ультрафиолетовые лучи, которые оказывают преимущественно химическое действие. Но в природе нельзя найти и следа такого явления... Делались самые разнообразные попытки примирить этот факт с классической теорией, но всякий раз оказывалось, что противоречие так глубоко затрагивает самые основы теории, что ее никак нельзя оставить неприкосновенной. Поэтому ничего другого не остается, как пересмотреть основные положения теории”.

Данный пример<sup>21</sup> приведен в подробностях с той целью, чтобы еще раз убедиться, каким образом довольно часто выстраивается критика классической теории. Ведь с этой задачи на излучение началась вся ломка классических представлений в самом начале XX века.

В приведенных примерах речь идет о волнах самой различной природы. На воде происходит превращение больших гравитационных волн в мелкие поверхностные волны с диссипацией энергии. К электромагнитным явлениям<sup>22</sup> это имеет очень малое отношение. Кроме этого, хорошо известно,

---

<sup>21</sup> По поводу “особого дара” Макса Планка, теоретика “до мозга костей”, выстраивать механизмы явлений, имеющих эмпирический смысл, ходили легенды, иногда приобретающие анекдотичный оттенок. «Петр Николаевич Лебедев, вернувшийся в 1891 г. из Германии, любил, например, рассказать своим студентам о том, как Планк «проштрафился» на коллоквиуме Кундта. Докладывая о своей работе по термодинамике насыщенных растворов, он вдруг замешкался. А потом сказал: «Здесь существует... некоторая принципиальная трудность, так как получить насыщенный раствор практически невозможно». Тут Кундт начинает тереть себе лоб и спрашивает: «Как так? Я не понимаю». – «Как же, - отвечает Планк, - по мере насыщения скорость растворения становится все меньше, а потому процесс ведет к насыщению только асимптотически, через бесконечно долгое время». – «Ну, - отвечает Кундт, - этого ждать мне некогда; я нагрею раствор, а потом его остужу». Планк сконфуженно соглашается...» [43].

<sup>22</sup> В отношении теории Максвелла Планк выносит окончательный приговор [44]: «...думаю, что не встречу серьезных возражений со стороны физиков, если скажу, подводя итоги, что допущение о точном соответствии с действительностью простых дифференциальных уравнений Максвелла-Герца несовместимо с возможностью механистического истолкования электродинамических явлений в чистом эфире. То

что даже в акустике волны при отражении от стенок или каких-либо препятствий никогда не дробятся на более мелкие волны, а происходит их постепенное затухание, т.е. диссипация энергии при сохранении длины волны в первом приближении.

Макс Планк самокритично писал: «Мои тщетные попытки как-то ввести квант действия в классическую теорию продолжались в течение ряда лет и стоили мне немалых трудов. Некоторые из моих коллег усматривали в этом своего рода трагедию» [45]. Тем не менее, как раз главной заслугой Планка было введение им новой универсальной константы для микромира – постоянной Планка. И, возможно, роковую роль “демона” в вопросах происхождения и поисках физического смысла загадочного “кванта действия” в гораздо большей степени чем Эйнштейн сыграл Нильс Бор, положивший в основу своей теории *атом Резерфорда и квант действия Планка* [46]. Именно впервые формальное получение необходимых количественных характеристик атома и подкупило физиков, а постоянная Планка на протяжении длительного времени рассматривается как величина, чуждая классической физике. Сам же Планк пытался связать свою константу как раз с классической физикой, но безуспешно. Наибольшим его продвижением в этом плане остается точка зрения, изложенная в «Лекциях по теории теплового излучения» [47] и в докладе «Законы теплового излучения и гипотеза кванта действия» на первом Сольвеевском конгрессе [48]. Планк рассматривал квантование резонатора (гармонического осциллятора) «как результат выделения в фазовом пространстве элементарных областей, равных по величине кванту действия  $h$ . Для осциллятора на  $(pq)$ -плоскости ( $q$  и  $p$  – обобщенные координата и импульс) площадь между двумя эллипсами, соответствующими значениям  $E$  и  $E+\varepsilon$ , будет

$$\int dqdp = h, \quad (4.31)$$

и условие квантования энергии  $E/\nu = nh$  может быть записано в виде

$$\int pdq = nh, \quad (4.32)$$

где *фазовый интеграл* берется по площади, ограниченной эллипсом, соответствующим значению энергии  $E = nh\nu$ , а  $n$  – целое число, которое

---

обстоятельство, что Максвелл вывел первоначально свои уравнения с помощью механистических представлений, не изменяет существа дела». По этому поводу следует заметить, что Максвелл попросту не успел ввиду преждевременной кончины завершить свою теорию и выявить механизмы формирования электромагнитных полей в эфире, но он был уверен в том, что электромагнитная энергия есть энергия механическая. Термин “механистический” имеет философский смысл и относится к тем случаям, когда исследователи чрезмерно увлекаются механикой процессов, когда это не совсем оправданно, и задача может быть решена иными более совершенными методами. При стремлении же исследователя проанализировать и раскрыть механизмы физических явлений использование термина “механистический подход” может вызвать просто недоумение, тем более, что рано или поздно исследователям, как правило, удается установить эти механизмы.

стали впоследствии называть *квантовым числом*. В дальнейшем условие (4.32) было обобщено на случай многих степеней свободы и были сформулированы условия для квантования многократно-периодических систем (обычно называемые квантовыми условиями Бора – Зоммерфельда) в виде

$$\int p_k dq_k = n_k h, \quad (4.33)$$

где  $q_k$  и  $p_k$  - обобщенные координата и импульс для  $k$ -й степени свободы, а  $n_k$  - соответствующее квантовое число» [49].

Благоговейные и мистические сентенции по поводу физического смысла *кванта действия*  $h$  – неперенный атрибут всех физических исследований на протяжении всего последнего столетия. Наиболее одаренный ученик Планка Макс фон Лауэ писал [50]: «Неотъемлемой характерной чертой физики XX в. является... открытая Планком универсальная физическая постоянная – элементарный квант действия, который мы, следуя Планку, обозначаем через  $h$ . Повсюду, где речь идет об атомной оболочке или атомном ядре, мы сталкиваемся всегда с этой постоянной».

«Об этой величине много думали, много писали и спорили. И не без основания. «Проникая во все отделы физики, - отмечал в свое время О. Д. Хвольсон, - она доказала свое мировое значение, доказала, что она играет великую роль в явлениях физических; она начинает проникать и в химию. Какова физическая ее сущность? Почему она так важна? Почему она как бы вторгается (чтобы не сказать – суется!) во всевозможные физические явления? Одним словом: что такое  $h$ ? – Неизвестно и непонятно!» [51]... *Дымка загадочности окружает постоянную Планка и по сей день*. Вместе с тем – это одна из важнейших так называемых универсальных постоянных современной физики. Она входит во все основные формулы квантовой физики, теории фотоэффекта, квантовой химии и даже встречается в таких, казалось бы, отдаленных областях, какова, например, теория кристаллов» [52].

Загадка *постоянной Планка*  $h$  обусловлена, в первую очередь, недостаточным уровнем понимания ее физического смысла, который последовательно будет проясняться по мере дальнейшего изложения. Здесь же, предварительно, уместно напомнить, что задачи атомной физики, связанные с взаимодействием электромагнитного излучения с атомными объектами (электронами), необходимо решать в рамках статистической физики. Таким образом, предложенный в свое время А. Эйнштейном достаточно упрощенный подход,<sup>23</sup> когда электромагнитные волны на

---

<sup>23</sup> Часто цитируется следующий фрагмент из доклада А. Эйнштейна, представленный им на 81-м собрании Общества немецких естествоиспытателей в Зальцбурге в 1909 г. [53]: «Все же мне кажется пока наиболее естественным, что появление электромагнитных полей света должно быть связано с особыми точками так же, как появление электростатических полей – с электронной теорией. Не исключено, что в такой теории всю энергию электромагнитного поля можно будет считать локализованной в этих особых точках, совсем как в старой теории дального действия. Я представляю себе каждую такую

определенном этапе подменяются фотоном, фотон же, как частица, в дальнейшем рассеивается на “персональном” электроне и так далее, не выдерживает критики во всех отношениях. Постоянная Планка  $h$ , со всей очевидностью, - это характеристика минимального (возможного) объема в фазовом пространстве, определенного для любого объекта микромира, в частности, для электрона. Причем данный минимальный фазовый объем определяется не постулативным путем, а из соображений статистической физики. В этой связи следовало бы отметить одну из центральных теорем статфизики, основу статистической физики, – теорему Жозефа Лиувилля (24.3.1809 – 8.9.1882) об инвариантности элемента фазового объема, установленную им еще в 1838 г.

Разработка основных принципов естественнонаучного мироздания, начатая Декартом, Галилеем и Ньютоном и успешно продолженная Френелем, Фарадеем, Максвеллом, Гельмгольцем, Больцманом, Лоренцем и многими другими выдающимися физиками, вполне соответствовала двум фундаментальным критериям философов, берущим свое начало чуть ли не с античных времен: во-первых, *природа не терпит пустот*, а во-вторых, *природа не делает скачков*<sup>24</sup>. В последнем случае, очевидно, имеются в виду очень резкие скачки с бесконечно малой продолжительностью происходящих изменений в объектах природы. Ясно, что в основу такой физической картины мира закладываются категории строгой причинности и непрерывности процессов. Разве это не самый мудрый подход к пониманию явлений природы? Гипотеза же квантов, довольно абстрактная и формальная, – это допущение прерывности в чистом виде, это идея внезапных скачков в природе. Именно данный аспект в “новой физике” – это, пожалуй, и есть в

---

особую точку окруженной силовым полем, которое в основном имеет характер плоской волны с амплитудой, уменьшающейся с удалением от особой точки. Если большое число таких особых точек находится на расстояниях, малых по сравнению с размерами силового поля одной особой точки, то силовые поля будут перекрываться и в целом дадут волновое силовое поле, быть может, очень мало отличающееся от волнового поля в смысле современной электромагнитной теории света. ***Вряд ли стоит подчеркивать, что до тех пор, пока такая картина не приведет к точной теории, ей не следует придавать особого значения***». Эйнштейн не был бы великим Эйнштейном, если бы не завершил свою мысль последней оговоркой. Да еще и годом ранее можно было бы заметить, что “соломка предварительно постелена” [54]: «Правда, все-таки нельзя утверждать, что квантовая теория является простым *следствием* закона излучения Планка и что другие интерпретации его невозможны. Но заведомо можно утверждать, что квантовая теория дает простейшую интерпретацию формулы Планка». К слову, чтобы уже не возвращаться к зальцбургскому докладу, напомним, как А. Эйнштейн буквально тремя фразами “разобрался” с интерференцией: «Я хочу сравнить положение с процессом молекуляризации носителей электрического поля. Поле, порождаемое атомизированными электрическими частичками, не очень существенно отличается от поля в прежнем понимании, и не исключено, что в теории излучения произойдет нечто подобное. Я не вижу принципиальных затруднений в явлениях интерференции».

<sup>24</sup> Здесь можно было бы добавить еще одно положения из ряда подобных, а именно: *ex nihilo nihil fit* (из ничего ничего не получится).

ней самое главное; это то, что отличает квантовую теорию от остальной физики.

Отцам-основателям квантовой теории показалось, что они предложили новый взгляд на сущность вещей [55]: «скачкообразные процессы столь же закономерны, как и явления непрерывности; природа делает скачки, “и даже, - добавляет Планк, - довольно странные...” [56]. Если говорить, например, о свете, то его излучение аналогично не непрерывно льющейся струе, а прерывистому ряду капель – это своего рода *световой дождь*<sup>25</sup>».

Но так ли обстоит дело в действительности? Ведь любое, даже очень медленное изменение в природе можно рассматривать как некоторый качественный скачок. Была система в одном устойчивом состоянии и затем переходит в другое квазиустойчивое состояние, а между этими двумя состояниями существует сложный переходный процесс. При этом интервал времени, в течение которого осуществляется этот переход, не может быть бесконечно малым. В любом случае мы будем иметь дело с некоторым переходным процессом, происходит ли он за ничтожные доли наносекунды или за часы – это не имеет принципиального значения. В этом смысле каких-то мгновенных скачкообразных изменений в природе попросту не существует, а если и имеются очень быстрые процессы, то на это должны быть и соответствующие причины, которые и требуется вскрыть исследователю. В противном случае вся физика сложного явления на одной гипотезе мгновенных скачков и закончится.

Для одних это – просто скачок, а для других – весьма интересный переходный процесс, смотря насколько глубоко вникнуть в данное физическое явление. Вот степень глубины подхода и отличают, на наш взгляд, классическую и квантовую теории. К примеру: цуги поперечных электромагнитных волн, которые излучают атомы в произвольные случайные моменты времени, можно рассматривать, с одной стороны, как сложный электромагнитный процесс в рамках теории Максвелла, с учетом статистических свойств случайных полей, а с другой стороны, если конечно

---

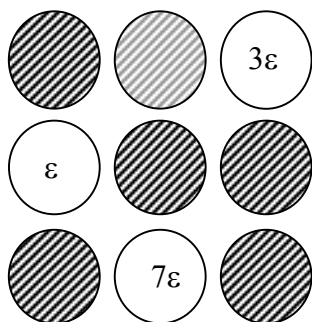
<sup>25</sup> Скорее всего, авторство этой аллегории принадлежит М. Планку, который, как известно, не чурался красот, особенно в научно-популярном жанре. А вот интересно, если в акустике рассматривать удар в гонг, то это уже квантовая физика или еще нет? Или когда «однозвучно звенит колокольчик»? Можно также рассмотреть испарение молекул жидкости (воды) с поверхности, то есть «утро туманное, утро седое...» Молекулы хаотически движутся, сталкиваются и вдруг одна (одинокая) вырывается, преодолев силы притяжения (или приобретя среднюю пороговую энергию возбуждения), в атмосферу, на «свободу», и уже не возвращается. Может быть, здесь мы тоже в преддверии квантовой физики? Промышленностью выпускаются ультразвуковые увлажнители воздуха в быту, применяются ультразвуковые технологии нередко в сварке, металлургии, приборостроении и т. д. Так там как – ультразвуковая волна или ультразвуковой квант выбивает отдельный атом? Мы все еще имеем дело с акустикой или уже с квантовой механикой? И, наконец, задача Штурма – Лиувилля со своими собственными значениями и собственными функциями. Где здесь заканчивается “классика” и начинаются “кванты”? По крайней мере, Э. Шредингер был в недоумении. Вообще, не надо торопиться. Надо основательно разбираться.



приложить усилие и желание, можно рассматривать и как просто своего рода “световой дождь”, как прерывистый поток капель. Однако когда мы выбираем последнюю упрощенную модель, следует сознавать всю ограниченность такого подхода и не распространять его на всю электродинамику. Чрезмерное увлечение формальными математическими моделями, а также их абсолютизация, и отличает современную квантовую теорию от всей остальной физики.

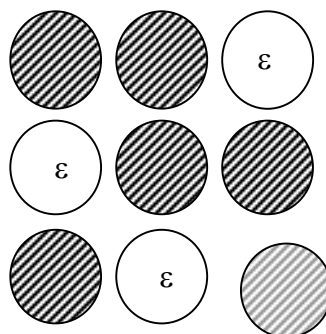
Ведь если допустить, что лучистая энергия испускается и поглощается только порциями, значит, по мнению многих, надо признать, что в световой волне она не распределена непрерывно, а сосредоточена в виде частиц света, корпускул. Однако прецизионные измерения по интерференции пучков света с предельно малой интенсивностью, где эти частицы света, казалось бы, должны были лететь по одиночке и не интерферировать, полностью опровергли данную гипотезу частиц.

**Гипотеза М. Планка  
(1900 г.)**



$N = 9, P = 11 ? (P > N)$   
 Величина  $P$  не определена.  
 Подгонка с помощью итераций.  
 Смысл  $\varepsilon$  не определен.  
 Физический смысл гипотезы отсутствует. Как быть с перестановками  $\varepsilon$  и  $3\varepsilon$ ?

**Решение по Больцману  
Шаляпин А.Л.**



$N = 9, P = 3 (P < N)$ .  
 $P$  – случайное число.  
 С учетом закона Вина  $\varepsilon = \text{const } \nu$  - текущее (мгновенное) значение энергии возбуждения атома ( $\varepsilon = 0 \div \infty$ ).

Рис. 4.1. Две совершенно различные схемы решения задачи излучения абсолютно черного тела.

Выше уже, по крайней мере дважды, отмечалось, что гипотеза Планка, не нуждаясь особенно в математических модификациях, все-таки предельно уязвима с точки зрения физической интерпретации. Еще раз – почему метод Планка поначалу не был в полной мере принят научным миром? Да потому, что этот метод представлял собой, прежде всего, некоторую смесь квантовых постулатов с классическими положениями. И только позднее, когда

квантовая механика сама уже, как физическая парадигма, создавалась на основе постулатов (а это ее основной методологический стиль самопостроения), постулаты Планка “естественным” образом, то есть органично, были внесены в эту общую теорию без доказательств (в которых они уже больше не нуждались) и без особого анализа. Всё сошлось; можно сказать, пришлось ко двору. И в дальнейшем начинается совершенно формальное квантование фазового пространства, которое ниоткуда, в принципе, не следовало, а проявлялось попытками подогнать математическую модель под эксперимент.

На рис. 4.1 представлены две схемы решения задачи. В левой части представлен метод Планка, который в своей теории применил формальный прием, не имеющий ничего общего с методом Больцмана.<sup>26</sup> Возможно, то, что М. Планк, разделив полную энергию  $U_N = NU$ , принадлежащую  $N$  осцилляторам на определенное целое число  $P$  равных частей  $\varepsilon = hv$ , так что  $U_N = P\varepsilon$ , распределил эти части между осцилляторами по комбинаторному принципу, отдаленно напоминает метод Больцмана. Однако Больцман никогда не имел дело с абстрактными понятиями, а имел дело с реальными объектами – атомами и молекулами, которые и участвовали в различных комбинациях в рамках молекулярно-кинетической теории.

На рис. 4.1 в правой части показана естественная схема решения данной задачи по методу Больцмана. Откуда естественным образом (по Больцману) находится статистический вес состояния, определяемый формулой (4.25), и энтропия состояния, вычисляемая по формуле  $S = k \ln W$ . Более детальные вычисления средней энергии возбуждения  $U = \langle \varepsilon \rangle$  целесообразно представить далее отдельно, например, в § 46.

При решении данной задачи нами были учтены следующие обстоятельства, мимо которых почему-то прошли многие (гипноз авторитетов?): атомы и молекулы в веществе при тепловых колебаниях сталкиваются между собой и переходят в возбужденные состояния с некоторой мгновенной энергией возбуждения  $\varepsilon$ . Возбуждения атомов являются случайными событиями и подчиняются статистике Максвелла – Больцмана. При решении данной задачи от мгновенных значений энергий возбуждения следует перейти к средней энергии возбуждения атома на поверхности излучающего тела в соответствии со статистикой Больцмана и использованием понятия энтропии сложной системы. Далее эта средняя

---

<sup>26</sup> Кстати, это сразу же отметили многие физики-современники, а не только Лоренц, Пуанкаре, Эйнштейн. В частности, Леон Розенфельд отозвался, «что метод вычисления Планком энтропии с классической точки зрения Больцмана представляется как “чистая ересь”. Планк... фактически отошел от метода Больцмана» [57]. Известно также замечание Арнольда Зоммерфельда [58]: «...Планк вопреки всему хотел спасти второе начало как строгий закон природы, лишь несколько иначе его толкуя (на докладе в Лейдене). Но Планк в глубине души является термодинамиком. Пусть даже он и развил статистику благодаря своей квантовой реформе больше, чем кто-либо другой, однако статистика не стала основой его образа мыслей».

энергия приравнивается средней энергии колеблющегося электрона в излучающей полости при воздействии тепловых полей.

Более подробно задача Планка по определению спектра излучения абсолютно черного тела полностью в классическом представлении рассмотрена в параграфах 44 – 46.

### **РЕЗЮМЕ:**

1. Спектральное распределение излучения абсолютно черного тела является фундаментальной задачей физики, поскольку представляет собой универсальный закон природы. Впервые на этот факт в 1859 г. указывает признанный авторитет в мире физической мысли XIX столетия Густав Роберт Кирхгоф.
2. Решение задачи, предложенное Максом Планком, нельзя признать в полной мере удовлетворительным, поскольку в нем содержатся внутренние противоречия, особенно в части физической интерпретации явления. Кроме того, не использован до конца арсенал классической физики. В то же время, для получения нужного результата “любой ценой” с удивительной легкостью предлагаются, в качестве постулатов, эвристические идеи, ставящие под сомнение классическую электродинамику. Самое удивительное в таковой легкости – это как раз то, что самого автора теории квантов сомнения относительно законности квантования энергии в реальных физических процессах не покидали всю его сознательную жизнь исследователя. Широкое распространение получает следующее мнение [59]: «Собственная теория представлялась ему неким “чуждым и угрожающим взрывчатым снарядом”. И он готов был уничтожить ее, лишь бы не упал волос с головы теории классической! “Конечно, - говорил он и тогда, и позже, - если бы гипотеза квантов во всех вопросах действительно превосходила классическую теорию, либо по меньшей мере была бы ей равноценна, то ничего не мешало бы целиком пожертвовать всей классической теорией; больше того, на эту жертву необходимо было бы решиться”. Он подчеркивает: “... если бы... превосходила...” *Если бы!* Но сам он в этом превосходстве сомневался. Ведь у гипотезы квантов не только сильные стороны, немало в ней и слабых...» Действительно, многие физические явления (эксперименты) могут быть объяснены непротиворечиво только на основе классической физики.
3. Неоспоримым достижением является внедрение в физику постоянной Планка. Несмотря на то, что универсальная постоянная  $\hbar$  вошла в физику в принципе формально (или постулативно), ей принадлежит

особая роль связующего звена во всем разнообразии явлений физики микромира.

4. На протяжении XX столетия после признания гипотезы Планка своевременной теорией не выполнялось серьезных попыток “классического решения” задачи излучения черного тела. Начиная с некоторого момента, никто уже не имел права (или не смел) усомниться в том, что решение Планка может оказаться вдруг не окончательным.
5. Любые попытки привлечь внимание к задаче Планка расцениваются нынче как беспочвенные амбиции. При этом можно сколько угодно апеллировать к оценкам-сомнениям великих классиков. Однако это бесполезно, так как такие оценки уже рассматриваются всего лишь как “афоризмы великих”. Можно детально анализировать статьи-первоисточники и вывод уравнений. Однако и это уже тоже и наивно, и примитивно, так как современная физика, оказывается – это вовсе не те почтенные “старика” Планк, Бор, Эйнштейн и Шредингер, а – это Альбер Мессиа [60], Клод Коэн-Таннуджин<sup>27</sup> [61] и Пьер-Жиль де Жён<sup>28</sup> [62], которых и следует нынче штудировать прежде, чем демонстрировать свое святотатство. Ведь так хочется подавить своей оснащенностью! Психологически приятно, правда ведь? А вот пятитомничек почитать не хотите ли? И еще тридцать три тома впридачу? История науки имеет множество свидетельств того, как чрезмерное “читательство и забалтывание” убивают достойные идеи на корню. Да и когда им было читать, например, Эваристу Галуа, прожившему 17 лет, или “троечнику” Альберту Эйнштейну, в двадцать с небольшим разразившемуся серией статей, перевернувшей всю физическую картину мироздания, и лишь в тридцать лет, наконец, встретившемуся с первым настоящим физиком на своем пути.
6. Если сложные задачи физики решаются сложно или вообще до поры до времени «не решаются», то это вовсе не значит, что классическую физику следует отменять. Давайте попробуем решить. Или попробуем хотя бы понять механизмы явления. Или хотя бы обсудить.

#### Библиографический список

1. Планк М. Единство физической картины мира: Сб. статей / Под ред. Б. Г. Кузнецова. – М.: Наука, 1966, 286 с. С. 149-151.

---

<sup>27</sup> Лауреат Нобелевской премии по физике 1997 г., профессор университета Париж – VI.

<sup>28</sup> Нобелевская премия по физике за 1991 г. присуждена за выдающиеся достижения в теоретическом описании молекулярного упорядочения в сложных конденсированных системах, особенно в жидких кристаллах и полимерах.

2. Блох М. А. Макс Планк: (К 25-лeтнему юбилею гипотезы квантов). – Природа, 1926, №34, с. 3-10.
3. Ельяшевич М. А. От возникновения квантовых представлений до становления квантовой механики. Успехи физических наук, т. 122, в. 4, 1977, с. 673-718.
4. Сборник статей «50 лет квантовой механики» / Под ред. Л. С. Полака. – М.: Наука, 1979.
5. Коган В. И. Упущенные возможности «рентгеновского» анализа изначальной (1900 г.) предсказательной силы открытия постоянной Планка (к 100-летию Первого Шага квантовой теории). Успехи физических наук, т. 170, №12, 2000, с. 1351-1357.
6. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики: Пер. с англ. / Под ред. Л. И. Пономарева. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1985, 384 с. С. 19.  
Jammer M. The Conceptual Development of Quantum Mechanics, N. Y., McGraw-Hill, 1966.
7. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. – М.: Гостехиздат, 1954. С. 563.
8. Уиттекер Э.Т. История теории эфира и электричества. Классические теории. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001, 512 с. С. 449-450.  
A History of the Theories of Aether and Electricity. The Classical Theories. – Thomas Nelson and Sons Ltd, London Edinburg Paris Melbourne Toronto and New York, 1953.
9. Планк М. Единство физической картины мира: Сб. статей / Под ред. Б. Г. Кузнецова. – М.: Наука, 1966, 286 с. С. 3.
10. Ibid., p. 14.
11. Борн М. Размышления и воспоминания физика. – М.: Наука, 1977, с. 58.
12. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна: Пер. с англ./Под ред. акад. А.А. Логунова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 568 с. С. 350-351.
13. Планк М. Единство физической картины мира. – М.: Наука, 1966, с. 149-151. С. 11-13.

14. Кляус Е.М., Франкфурт У.И. Макс Планк (1858 - 1947). – М.: Наука, 1980, 392 с. С.320-321.
15. Кляус Е. М., Франкфурт У. И., Френк А. М. Г. А. Лоренц. – М.: Наука, 1974. С. 171.
16. Планк М. О необратимых процессах излучения. Избранные труды. – М.: Наука, 1975. С. 191-233.
17. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики: Пер. с англ. / Под ред. Л. И. Пономарева. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1985, 384 с. С. .  
Jammer M. The Conceptional Development of Quantum Mechanics, N. Y., McGraw-Hill, 1966.
18. Тригг Дж. Л. Решающие эксперименты в современной физике. – М.: Издательство «Мир», 1974, 160 с. С. 21-22.
19. Сборник задач по математике для вузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М.: Наука, главная редакция физ.-мат. литературы, 1986, 464 с.
20. Ландау Л. Д. Теория квант от Макса Планка до наших дней. – В кн.: Макс Планк (1858 – 1958), с. 96.
21. Hermann A. Frühgeschichte der Quantentheorie 1899 – 1913. – Baden: Mesbach, 1969. – S. 32.
22. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна: Пер. с англ./Под ред. акад. А.А. Логунова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 568 с. С. 353.
23. Базаров И. П. Термодинамика. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961, 292 с. С. 54.
24. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна: Пер. с англ./Под ред. акад. А.А. Логунова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 568 с. С. 62-63.
25. Ibid., p. 353-354.
26. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984, 528 с.

27. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна: Пер. с англ./Под ред. акад. А.А. Логунова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 568 с. С. 353.
28. Кляус Е.М., Франкфурт У.И. Макс Планк (1858 - 1947). – М.: Наука, 1980, 392 с. С. 94.
29. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна: Пер. с англ./Под ред. акад. А.А. Логунова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 568 с. С. 354.
30. Эйнштейн А. Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света. Собр. науч. трудов в 4-х томах. – М.: Наука, 1966. Т. 3, 632 с. С. 92–107.  
Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Ann. Phys., 1905, **17**, 132 – 148.
31. Кляус Е.М., Франкфурт У.И. Макс Планк (1858 - 1947). – М.: Наука, 1980, 392 с. С.115-116.  
Борн М. Физика в жизни моего поколения. – М.: ИЛ, 1963, с. 372.
32. «Conseil de Physique, Institute Solvay, 1911. Rapports». Paris, Gauthier, 1912.
33. Die Theorie der Strahlung und die Quanten. Abhandlungen der Bunsengesellschaft, Bd. 3. Berlin, 1913, S. 77-108.
34. Макс Планк. Избранные труды / Под ред. Л. С. Полака. – М.: Наука, серия «Классики науки», 1975, 788 с.
35. Умов Н. А. Собрание сочинений. – М., 1916. т. 3, с. 514.
36. Eve A. S. Rutherford. Being the Life and Letters of the Rt. Hon. Lord Rutherford. Cambridge, 1939, p. 223.
37. Планк М. Новейшие теории в термодинамике (Теорема теплоты Нернста и гипотеза квант). – СПб., 1913, с. 35.
38. Полак Л. С. Макс Планк и возникновение квантовой физики. – В кн.: Планк М. Избр. труды, с. 309.
39. Эйнштейн А. К теории возникновения и поглощения света. Собр. науч. трудов в 4-х томах. – М.: Наука, 1966. Т. 3, 632 с. С. 128-133.  
Zur Theorie der Lichtezeugung und Lichtabsorption. Ann. Phys., 1906, **20**, 199-206.

40. Эйнштейн А. О развитии наших взглядов на сущность и структуру излучения. Собр. науч. трудов в 4-х томах. – М.: Наука, 1966. Т. 3, 632 с. С. 181-195.  
Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung. Phys. Zs., 1909, 10, 817-825. См. также Dtsch. Phys. Ges. Verh., 1909, **11**, 482-500. Доклад на 81-м собрании Общества немецких естествоиспытателей в Зальцбурге.
41. Эйнштейн А. К теории возникновения и поглощения света. Собр. науч. трудов в 4-х томах. – М.: Наука, 1966. Т. 3, 632 с. С. 128-133.  
Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption. Ann. Phys., 1906, **20**, 199-206.
42. Планк М. Единство физической картины мира: Сб. статей / Под ред. Б. Г. Кузнецова. – М.: Наука, 1966, 286 с.
43. Кляус Е.М., Франкфурт У.И. Макс Планк (1858 - 1947). – М.: Наука, 1980, 392 с. С.48.
44. Планк М. Единство физической картины мира: Сб. статей / Под ред. Б. Г. Кузнецова. – М.: Наука, 1966, 286 с.
45. Ibid., p. 19.
46. Bohr N. On the Constitution of Atoms and Molecules, Phil. Mag., **26**, 1 – 25 (part I), 476 – 502 (part II), 857 – 875 (part III) (1913) (Н. Бор, Труды, III, 81 – 148).
47. Planck M. Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig, Barth, 1906 (2. Aufl., 1913; 3. Aufl., 1919; 4. Aufl., 1921; 5. Aufl., 1923) (М. Планк, Теория теплового излучения, пер. с 5-го нем. изд., М. – Л., 1935).
48. Planck M. Die Gesetze der Wärmestrahlung und die Hypothese der elementaren Wirkungsquanten. Vortrag, gehalten auf dem Solway-Kongress, Brüssel, 1911 (М. Планк, Труды, 282 – 310).
49. Sommerfeld A. Atombau und Spektrallinien, Braunschweig, Viewig, 1919 (2. Aufl., 1921; 3. Aufl., 1922; 4. Aufl., 1924) (А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, пер. с 3-го нем. изд., М. – Л., Госиздат, 1926).
50. Лауэ М. Дело жизни Макса Планка. – В кн.: Макс Планк. 1858 – 1958: Сб. к столетию со дня рождения Макса Планка / Под ред. А. Ф. Иоффе и А. Т. Григорьяна. – М.: Изд-во АН СССР, 1958, 276 с. С. 126.



51. Хвольсон О. Д. Характеристика развития физики за последние 50 лет. – Л., 1924, с. 209.
52. Кляус Е.М., Франкфурт У.И. Макс Планк (1858 - 1947). – М.: Наука, 1980, 392 с. С.91.
53. Эйнштейн А. О развитии наших взглядов на сущность и структуру излучения. Собр. науч. трудов в 4-х томах. – М.: Наука, 1966. Т. 3, 632 с. С. 181-195.  
Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung. Phys. Zs., 1909, 10, 817-825. См. также Dtsch. Phys. Ges. Verh., 1909, 11, 482-500. Доклад на 81-м собрании Общества немецких естествоиспытателей в Зальцбурге.
54. Эйнштейн А. К современному состоянию проблемы излучения. Собр. науч. трудов в 4-х томах. – М.: Наука, 1966. Т. 3, 632 с. С. 164-179.  
Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems. Phys. Zs., 1909, 10, 185-193.
55. Кляус Е.М., Франкфурт У.И. Макс Планк (1858 - 1947). – М.: Наука, 1980, 392 с. С.79.
56. Планк М. Единство физической картины мира: Сб. статей / Под ред. Б. Г. Кузнецова. – М.: Наука, 1966, 286 с. С. 77.
57. Кляус Е.М., Франкфурт У.И. Макс Планк (1858 - 1947). – М.: Наука, 1980, 392 с. С.73.
58. Ibid., p. 73.
59. Ibid., p. 86.
60. Мессиа А. Квантовая механика, в 2-х т. – М.: 1978.
61. Коэн-Таннуджи К., Диу Б., Лалоз Ф. Квантовая механика / Пер. с фр. Л. Н. Новикова: В 2-х т. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2000.
62. Де Жён П.-Ж. Сверхпроводимость металлов и сплавов / Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968; Физика жидких кристаллов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1977.  
Gennes P.-G. de. // Solid State Physics. 1978. Suppl. 14. P. 1 – 18.